Производящие функции

Метод производящих функций для изучения последовательности $(a_n) \subset k$ сопоставляет ей *производящую функцию* $A(t) = \sum a_n t^n \in k[[t]]$, переформулирует свойства последовательности в виде *функциональных* (алгебраических, дифференциальных, ...) соотношений на $A(t)$ и использует для их изучения исчисление формальных степенных рядов.

Реккурентное уравнение k-того порядка — это соотношение $y_n = a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k}$, в котором $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — заданные числа (причём $a_k \neq 0$), а (y_n) — неизвестная последовательность. Любой набор из k чисел $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ однозначно продолжается до удовлетворяющей уравнению последовательности (y_n) с начальными значениями $y_\nu = c_\nu$ при $\nu = 0, \ldots, (k-1)$.

M$28\frac{2}{3}$◇1. Положим $Y(t) = \sum\limits_{\nu \geqslant 0} y_\nu t^\nu \in \mathbb{C}[[t]]$, $A(t) = 1 - a_1 t - \cdots - a_k t^{n-k} \in \mathbb{C}[t]$, $B(t) = Y(t)A(t)$. Выясните, является ли ряд $B(t)$ многочленом и выразите его коэффициенты через a_ν и c_ν.

M$28\frac{2}{3}$◇2. Пользуясь предыдущей задачей, найдите $Y(t)$ и «формулу n-того члена» для последовательностей: **а)** $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ с $y_0 = 0$, $y_1 = 1$; **б)** $y_n = 4\,(y_{n-1} - y_{n-2})$ с $y_0 = 3$, $y_1 = 1$.

M$28\frac{2}{3}$◇3*. Пусть $x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_{k-1} x - a_k = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_N)^{m_s}$, где все $\lambda_j \in \mathbb{C}$ попарно различны. Докажите, что $y_n = \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{i=0}^{m_j} \gamma_{ij} f_{ij}(n)$, где функции $f_{ij}(n) \overset{\text{def}}{=} \binom{n}{i} \lambda_j^n$, а $\gamma_{ij} \in \mathbb{C}$ — некоторые константы, однозначно определяемые k начальными значениями последовательности.

Число разбиений $p(n)$ — это число всевозможных представлений n в виде суммы ненулевых неупорядоченных слагаемых, т. е. число всех n-клеточных диаграмм Юнга.

M$28\frac{2}{3}$◇4. Вычислите $p(n)$ для $n \leqslant 10$.

M$28\frac{2}{3}$◇5. Убедитесь, что в $\mathbb{Q}[[t]]$ корректно определено бесконечное произведение геометрических прогрессий $P(t) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{k \geqslant 1} (1 - t^k)^{-1}$ и выразите коэффициенты $P(t)$ через числа разбиений.

M$28\frac{2}{3}$◇6. Докажите, что $1/P(t) = \prod\limits_{k \geqslant 1} (1 - t^k) = 1 + \sum\limits_{n \geqslant 1} (\widehat{p}_{\text{ч}}(n) - \widehat{p}_{\text{н}}(n)) \cdot t^n$, где $\widehat{p}_{\text{ч}}(n)$ и $\widehat{p}_{\text{н}}(n)$ суть количества n-клеточных диаграмм Юнга, которых длины всех строк различны, а общее число строк чётным и, соответственно, нечётно.

M$28\frac{2}{3}$◇7. Рассмотрим множество $\widehat{Y}_n$ всех n-клеточных диаграмм Юнга, строки которых имеют попарно разную длину. Будем называть *торцом* такой диаграммы её правую верхнюю клетку и все клетки, идущие от неё под углом 45° по диагонали влево вниз. Попробуем задать на $\widehat{Y}_n$ отображение, которое, в зависимости от того, что у диаграммы длинее — торец или нижняя строка, либо отрезает её торец и пририсовывет его новой нижней строкой, либо, наоборот, отрезает нижнюю строку и пририсовывет её новым торцом. Выясните, для каких диаграмм это отображение не определено, и при каких n оно устраивает в $\widehat{Y}_n$ биекцию между диаграммами из чётного и из нечётного числа строк (а с нею — равенство $\widehat{p}_{\text{ч}}(n) = \widehat{p}_{\text{н}}(n)$).

M$28\frac{2}{3}$◇8 (пентагональная теорема Эйлера). $1/P(t) = 1 + \sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^k \left(t^{\left(3k^2 - k\right)/2} + t^{\left(3k^2 + k\right)/2} \right)$ и $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \cdots$ (докажите).

M$28\frac{2}{3}$◇9. Является ли $P_m(t) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n \geqslant 0} p_m(n) \cdot t^n$, где $p_m(n)$ — это число n-клеточных диаграмм Юнга из $\leqslant m$ строк, рациональной функцией от t? Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$.

M$28\frac{2}{3}$◇10 (гауссовы биномиальные коэффициенты). Пусть $F_n(t) = (1-t)(1-t^2) \cdots (1-t^n)$. Является ли $G_n^k(t) \overset{\text{def}}{=} F_n(t) / (F_k(t) \cdot F_{n-k}(t))$ многочленом? Вычислите $\lim\limits_{t \to 0} G_n^k(t)$.

M$28\frac{2}{3}$◇11. Выразите через гауссовы биномиальные коэффициенты производящую функцию $P_m^k(t) = \sum\limits_{n \geqslant 0} p_m^k(n) \cdot t^n$ чисел $p_m^k(n)$ n-клеточных диаграмм Юнга высоты $\leqslant m$ и ширины $\leqslant k$.