Письменный экзамен за первый семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Пусть подгруппа A некоей абелевой группы содержится в объединении конечного числа подгрупп. Следует ли отсюда, что A целиком содержится в одной из них?

Задача 2 (10 баллов). Найдите наибольшую из степеней всех неприводимых делителей многочлена $x^{p^k} - x$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

Задача 3 (10 баллов). В вершинах куба проставлены числа $b_1, b_2, \dots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи при всех $b_1, b_2, \dots, b_8$, для которых она имеет решения.

Задача 4 (10 баллов). Матрица A размера $n \times n$ имеет ранг $n-1$. Каков ранг у её присоединённой матрицы[1] $A^\vee$?

Задача 5 (10 баллов). Пусть $A = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и $B = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$ имеют коэффициенты в произвольном поле $\Bbbk$, причём $a_0, b_0 \neq 0$ и $n \geqslant m$. Обозначим через d_k определитель матрицы, которая получается выкидыванием по k строк и столбцов сверху, снизу, слева и справа из матрицы

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccccc}
a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots \\
 & & & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\
 & & & & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m \\
 & & & \iddots & & \iddots & \iddots & \\
 & & \iddots & & \iddots & \iddots & & \\
 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & \\
b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & &
\end{array}\right)}_{m+n}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n
\end{array}$$

Покажите, что индекс первого ненулевого члена последовательности $d_0,\ d_1,\ d_2,\ \dots$ равен степени наибольшего общего делителя[2] A и B в $\Bbbk[x]$.

Задача 6. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-модуль *целозначных многочленов* $M \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \forall m \in \mathbb{Z}\ f(m) \in \mathbb{Z}\}$ и обозначим через $M_d \subset M$ подмодуль многочленов степени $\leqslant d$.

а) (10 баллов) Образуют ли многочлены $\beta_k(x) = \binom{x+k+d}{d} = (x+k+1)(x+k+2)\cdots(x+k+d)/d!$, где $0 \leqslant k \leqslant d$, базис модуля M_d над $\mathbb{Z}$?

б) (10 баллов) Сколько элементов в факторе $M_d/(M_d \cap \mathbb{Z}[x])$?

в) (10 баллов) Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}$-линейных эндоморфизмов $M \to M$, перестановочных со всеми операторами сдвига: $f(x) \mapsto f(x+n)$, изоморфно $\mathbb{Z}[[\nabla]]$, где $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$.

---

[1] напомним, что $a^\vee_{ij} = (-1)^{i+j} a_{\hat{j}\hat{i}}$ есть алгебраическое дополнение к a_{ji}

[2] в частности, A и B взаимно просты тогда и только тогда, когда исходная матрица невырождена