

Письменный экзамен за первый семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

- Задача 1 (10 баллов).** Может ли конечномерное векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного набора подпространств меньшей размерности?
- Задача 2 (10 баллов).** Обозначим через \mathbb{F}_{27} поле из 27 элементов¹, а через $\mathbb{k} \supset \mathbb{F}_{27}$ — поле наименьшей размерности над \mathbb{F}_{27} , в котором многочлен $x^{11} - 1$ полностью раскладывается на линейные множители. Найдите $\dim_{\mathbb{F}_{27}} \mathbb{k}$.
- Задача 3 (10 баллов).** На ребрах тетраэдра написаны числа b_1, b_2, \dots, b_6 . При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех b_1, b_2, \dots, b_6 , для которых задача имеет решения.
- Задача 4 (10 баллов).** Найдите по три ненулевых младших члена разложений Пиузо каждого из корней $x(t)$ многочлена $x^3 + (t^2 - t)x + t^3$.
- Задача 5 (10 баллов).** Покажите, что однородный грассманов многочлен ω второй степени является произведением двух линейных грассмановых многочленов тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.
- Задача 6 (10 баллов).** Зафиксируем произвольным образом пару $n \times n$ -матриц A, B и натуральное k в пределах $1 \leq k \leq n$. Рассмотрим всевозможные пары матриц A', B' , которые получаются из A, B сохраняющим порядок взаимным обменом каких-либо k столбцов матрицы A с первыми k столбцами² матрицы B . Покажите, что сумма произведений $\det A' \cdot \det B'$ по всевозможным выборам k столбцов в A равна $\det A \cdot \det B$.
- Задача 7 (10 баллов).** Абелева группа A называется *полупростой*, если для любой её подгруппы $B \subset A$ найдётся такая подгруппа $C \subset A$, что $A = B \times C$. Перечислите все конечнопорождённые полупростые абелевы группы.
- Задача 8 (10 баллов).** Считая, что объём единичного целочисленного кубика равен единице, выразите объём n -мерного параллелепипеда $P \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ через число целых точек, находящихся строго внутри самого P , строго внутри $(n - 1)$ -мерных граней P , строго внутри $(n - 2)$ -мерных граней P и т. д.

¹желающие могут считать, что $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$, где $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$

²т. е. в A отмечаются k столбцов с номерами, скажем, $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ и для каждого $\mu = 1, 2, \dots, k$ j_μ -тый столбец A записывается вместо μ -того столбца B , а μ -тый столбец B записывается вместо j_μ -того столбца A