

## Письменный экзамен за второй семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

**Задача 1 (10 баллов).** Найдите все собственные векторы и собственные значения линейного оператора  $x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}$  на пространстве многочленов степени  $\leq n$  от  $x$  и  $y$ .

**Задача 2 (10 баллов).** Какова сигнатура квадратичной формы  $A \mapsto \text{tr}(A^2)$  на пространстве вещественных  $n \times n$ -матриц?

**Задача 3 (10 баллов).** Верно ли, что в группе порядка  $p^n$  любая подгруппа порядка  $p^k$  с  $k < n$  содержится в некоторой подгруппе порядка  $p^{k+1}$ ?

**Задача 4 (10 баллов).** Рассмотрев действие группы  $G$  на множестве силовских 5-подгрупп, покажите, что всякая простая группа  $G$  порядка 60 изоморфна  $A_5$ .

**Задача 5.** Существует ли комплексная  $2 \times 4$ -матрица с множеством  $2 \times 2$ -миноров

а) (10 баллов)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$       б) (10 баллов)  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  ?

(Если да, приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.)

**Задача 6 (10 баллов).** Зафиксируем на  $\mathbb{C}^n$  стандартную эрмитову структуру. Для эрмитовой  $n \times n$ -матрицы  $A$  и произвольного  $r$ -мерного подпространства  $L \subset \mathbb{C}^n$  положим  $R_L(A) = \sum_{i=1}^r (Ae_i, e_i)$ , где  $e_1, e_2, \dots, e_r \in L$  — какой-нибудь ортонормальный базис в  $L$ .

а) (10 баллов) Зависит ли  $R_L(A)$  от выбора ортонормального базиса в  $L$ ?

б) (10 баллов) Пусть матрица  $A$  имеет попарно различные собственные значения

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n .$$

Чему равен  $\max_L R_L(A)$  по всем  $r$ -мерным подпространствам  $L \subset \mathbb{C}^n$  ?

**Задача 7 (10 баллов).** Решите в теле кватернионов  $\mathbb{H}$  систему уравнений

$$\begin{cases} k = (1 + i) \cdot x + j \cdot y \\ i = (1 + j) \cdot x + k \cdot y \end{cases}$$