§4. Рациональные функции и степенные ряды

В этом параграфе мы продолжаем обозначать через K произвольное коммутативное кольцо с единицей, а через $\Bbbk$ — произвольное поле.

4.1. Кольца частных. Конструкция, изготавливающая поле $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$ как множество дробей с целым числителем и целым ненулевым знаменателем[1], имеет смысл в любом коммутативном кольце K с единицей.

Будем называть подмножество $S \subset K$ *мультипликативным*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $st \in S$ для любых $s, t \in S$.

Например, если элемент $q \in K$ не является нильпотентным, то множество всех его целых неотрицательных степеней q^k мультипликативно[2].

Множество $K^{\circ} \subset K$, состоящее из всех ненулевых элементов, которые не являются делителями нуля, также мультипликативно. В частности, множество всех ненулевых элементов любого целостного кольца мультипликативно.

Свяжем с каждым мультипликативным подмножеством $S \subset K$ наименьшее отношение эквивалентности $\underset{S}{\sim}$ на множестве упорядоченных пар $K \times S$, содержащее все эквивалентности вида $(a, t) \sim (as, ts)$ с произвольными $s \in S$. Будем называть полученные классы эквивалентности *дробями со знаменателями из* S и обозначать a / s. Множество всех дробей со знаменателями в S обозначим KS^{-1} или $K[S^{-1}]$ и назовём *кольцом частных* (или *локализацией*) кольца K со знаменателями в S.

Лемма 4.1
$a/r = b/t$ в $KS^{-1} \iff \exists\, s \in S \,:\, ats = brs$ в K.

Доказательство. Будем писать $(a, r) \approx (b, t)$, если $\exists\, s \in S \,:\, (at - br)s = 0$ в K. В этом случае двухшаговая цепочка элементарных отождествлений $(a, r) \sim (ats, rts) = (brs, rts) \sim (b, t)$ показывает, что отношение $\approx$ содержится в отношении $\underset{S}{\sim}$. Остаётся убедиться, что $\approx$ является отношением эквивалентности — тогда оно совпадёт с $\underset{S}{\sim}$ в виду минимальности последнего. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $(a, r) \approx (b, t)$ и $(b, t) \approx (c, u)$, т. е. существуют такие $s_1, s_2 \in S$, что $ats_1 = brs_1$ и $bus_2 = cts_2$. Тогда $au(ts_1s_2) = brus_1s_2 = cr(ts_1s_2)$, т. е. $(a, r) \approx (c, u)$. $\square$

Лемма 4.2
Операции $\frac{a}{r} + \frac{b}{s} \overset{\text{def}}{=} \frac{as+br}{rs}$ и $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{s} \overset{\text{def}}{=} \frac{ab}{rs}$ корректно задают на KS^{-1} структуру коммутативного кольца с единицей $1/1$ и нулём $0/1$.

Доказательство. Поскольку всякое отношение $\underset{S}{\sim}$ представляет собой одно- или двушаговую цепочку элементарных отождествлений $(a, r) \sim (au, ru)$ достаточно проверить, что результаты операций не меняются при замене $\frac{a}{r}$ на $\frac{au}{ru}$, а $\frac{b}{s}$ — на $\frac{bw}{sw}$,:

$$\frac{au}{ru} + \frac{bw}{sw} = \frac{ausw + bwru}{rusw} = \frac{(as + br) \cdot wu}{rs \cdot wu} = \frac{as + br}{rs}$$
$$\frac{au}{ru} \cdot \frac{bw}{sw} = \frac{aubw}{rusw} = \frac{(ab) \cdot wu}{rs \cdot wu} = \frac{ab}{rs}\,.$$

[1]см. прим. 1.5 на стр. 12 и прим. 2.2 на стр. 17
[2]мы по определению полагаем $q^0 = 1$

Проверку выполнения в KS^{-1} всех аксиом коммутативного кольца с единицей мы оставляем читателю в качестве упражнения. □

Теорема 4.1
Отображение $\iota_S : K \to KS^{-1}$, переводящее $a \in K$ в дробь $a/1$, является гомоморфизмом колец, причём $\iota_S(s)$ обратим в KS^{-1} для любого $s \in S$, и $\ker \iota = \{a \in K \mid \exists\, s \in S : as = 0\}$. Для любого гомоморфизма $\varphi : K \to R$ в целостное кольцо R, такого что $\varphi(s)$ обратим в R для всех $s \in S$, существует единственный гомоморфизм колец $\varphi_S : KS^{-1} \to R$, такой что $\varphi = \varphi_S \circ \iota$.

Доказательство. Гомоморфность ι очевидна. Обратной к дроби $\iota(s) = s/1$ является дробь $1/s$. Дробь $\iota(a) = a/1$ равна $0/1$ тогда и только тогда, когда найдётся $s \in S$, такой что $a \cdot 1 \cdot s = 0 \cdot 1 \cdot s = 0$. Докажем последнее утверждение. Чтобы продолжить гомоморфизм $\varphi : K \to R$ до гомоморфизма $\varphi_S : KS^{-1} \to R$, у нас нет иного выбора как положить $\varphi_S(1/s) = 1/\varphi(s)$, поскольку должны выполняться равенства $\varphi_S(1/s) \cdot \varphi(s) = \varphi_S\big(s \cdot (1/s)\big) = \varphi_S(1) = 1$. Тем самым, продолжение обязано задаваться формулой $\varphi_S(a/r) \overset{\text{def}}{=} \varphi(a) \cdot \frac{1}{\varphi(r)}$. Остаётся проверить, что она корректна и задаёт гомоморфизм. Заменяя $\frac{a}{r}$ на $\frac{as}{rs}$, получаем

$$\varphi_S\left(\frac{as}{rs}\right) = \frac{\varphi(as)}{\varphi(rs)} = \frac{\varphi(a)\,\varphi(s)}{\varphi(r)\,\varphi(s)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(r)}\,.$$

Аналогично проверяется, что φ_S перестановочен со сложением и умножением. □

Замечание 4.1. Кольцо KS^{-1} и гомоморфизм $\iota_S : K \to KS^{-1}$ определяются последним свойством из теор. 4.1 однозначно с точностью до единственного изоморфизма в следующем точном смысле. Пусть гомоморфизм $\iota' : K \to F$ делает все элементы из S обратимыми в F и обладает универсальным свойством из теор. 4.1: для любого гомоморфизма $\varphi : K \to R$ в целостное кольцо R, делающего все элементы из S обратимыми в R, существует единственный гомоморфизм колец $\varphi'_S : F \to R$, такой что $\varphi = \varphi'_S \circ \iota'$. Тогда существует единственный изоморфизм $\psi : KS^{-1} \xrightarrow{\sim} F$, такой что $\iota' = \psi \circ \iota$.

Действительно, в силу универсальности гомоморфизма ι гомоморфизм ι' единственным образом представляется в виде $\iota' = \psi \circ \iota$, а в силу универсальности гомоморфизма ι' гомоморфизм ι точно так же единственным образом представляется в виде $\iota = \psi' \circ \iota'$. Композиция $\psi' \circ \psi$ доставляет разложение самого гомоморфизма ι в виде $\iota = \psi' \circ \psi \circ \iota$. Поскольку одновременно $\iota = \mathrm{Id}_{KS^{-1}} \circ \iota$, из единственности такого представления вытекает, что $\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}_{KS^{-1}}$. По той же причине $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_F$. Таким образом, ψ' и ψ являются взаимно обратными изоморфизмами.

Замечание 4.2. Если в определении мультипликативной системы отбросить требование $0 \notin S$, то всё сказанное выше не утратит формального смысла: эквивалентность $\underset{S}{\sim}$ и кольцо KS^{-1} будут по-прежнему определены, а лем. 4.1, лем. 4.2 и теор. 4.1 (как и их доказательства) останутся в силе. Однако, если $0 \in S$, кольцо KS^{-1} получится нулевым: все дроби a/s будут эквивалентны дроби $0/1 = 0$.

Упражнение 4.1. Убедитесь в этом.

4.1.1. Поле частных целостного кольца. Если кольцо K не имеет делителей нуля, его ненулевые элементы образуют мультипликативную систему. Кольцо частных со знаменателями в этой системе называется *полем частных* целостного кольца K и обозначается Q_K.

Упражнение 4.2. Проверьте, что это действительно поле.

Гомоморфизм $\iota : K \hookrightarrow Q_K$, переводящий $a \in K$ в $a/1 \in Q_K$ в этом случае инъективен, и для любого гомоморфизма $\varphi : K \to R$ в целостное кольцо R, переводящего все ненулевые элементы K в обратимые элементы R, единственным способом продолжается до инъективного гомоморфизма $\widetilde{\varphi} : Q_K \hookrightarrow R$.

Пример 4.1 (поле $\mathbb{Q}$)
Полем частных целостного кольца $\mathbb{Z}$ является поле рациональных чисел $\mathbb{Q} = Q_{\mathbb{Z}}$, которое канонически вкладывается в любое поле характеристики нуль в качестве простого подполя (ср. с n° 2.8.1).

Пример 4.2 (поле рядов Лорана)
Поле частных целостного кольца формальных степенных рядов $\Bbbk[\![x]\!]$ с коэффициентами в произвольном поле $\Bbbk$ называется полем *рядов Лорана* и обозначается $\Bbbk((x)) = Q_{\Bbbk[\![x]\!]}$. Название «ряд Лорана» объясняется тем, что каждый элемент $f \in \Bbbk((x))$ можно записать как формальный степенной ряд, в котором допускается конечное число отрицательных степеней переменной x

$$f(x) = \sum_{k \geqslant -m} a_k x^k = x^{-m} h(x)\,, \quad \text{где} \quad h \in \Bbbk[\![x]\!]\,. \tag{4-1}$$

В самом деле, по определению поля частных $f(x) = p(x)/q(x)$, где $p, q \in \Bbbk[\![x]\!]$ и $q \neq 0$. Если младший член ряда q имеет степень m, то $q = x^m \cdot g(x)$, где $g \in \Bbbk[\![x]\!]$ имеет ненулевой свободный член и, стало быть обратим. Поэтому мы можем записать исходную дробь в виде $f(x) = x^{-m} h(x)$, где $h = p/g \in \Bbbk[\![x]\!]$ является обычным степенным рядом.

4.2. Поле рациональных функций. Поле частных кольца многочленов $\Bbbk[x]$ обозначается через $\Bbbk(x)$ и называется *полем рациональных функций* от одной переменной. Элементы этого поля представляют собой формальные отношения многочленов $f(x) = p(x)/q(x)$ с коэффициентами в поле $\Bbbk$. Если нод$(p, q) = 1$, то запись $f = p/q$ называется *несократимым представлением* дроби f. Каждая дробь имеет несократимое представление, которое получается из произвольной записи $f = g/h$ делением числителя и знаменателя на нод(g, h).

Упражнение 4.3. Покажите, что несократимая запись любой дроби единственна с точностью до умножения числителя и знаменателя на ненулевую константу (в частности, имеется ровно одно несократимое представление с приведённым знаменателем).

Предложение 4.1
Если знаменатель несократимой записи f/g является произведением попарно взаимно простых многочленов $g = g_1 g_2 \dots g_m$, то дробь f/g *единственным образом* представляется в виде суммы

$$\frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \dots + \frac{f_m}{g_m}\,, \tag{4-2}$$

в которой $\deg h = \deg f - \deg g$ и $\deg f_i < \deg g_i$.

Доказательство. Поделим f на g с остатком: $f = hg+r$, где $\deg r < \deg g$. Тогда $f/g = h+r/g$. Если $g = g_1 g_2$ и нод$(g_1, g_2) = 1$, то существует единственный такой многочлен f_1, что $\deg f_1 < \deg g_1$ и $[f_1]_{g_1} = [r]_{g_1}/[g_2]_{g_1}$ в кольце вычетов $\Bbbk[x]/(g)$. Тогда в $\Bbbk[x]$ мы имеем равенство $r = f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1$ для некоторого многочлена f_2, причём сравнение степеней показывает, что $\deg f_2 < \deg g_2$. Таким образом, $r/g = f_1/g_1 + f_2/g_2$, и с каждой из этих дробей можно снова проделать аналогичную процедуру. Это доказывает существование разложения (4-2). Чтобы доказать его единственность, умножим обе части произвольного разложения (4-2) на g. Получим равенство $f = hg + f_1 G_1 + f_2 G_2 + \dots + f_m G_m$, в котором

$$G_i = g_1 g_2 \, \dots \, g_{i-1} g_{i+1_1} g_{i+1_2} \, \dots \, g_{i+1_m} \quad \text{и} \quad \deg(f_1 G_1 + f_2 G_2 + \dots + f_m G_m) < \deg g \,.$$

Тем самым, многочлен h является неполным частным от деления f на g, многочлен $r = f_1 G_1 + f_2 G_2 + \dots + f_m G_m$ — остатком от этого деления, а каждый f_i — единственным многочленом степени $\deg f_i < \deg g_i$, представляющим в кольце вычетов $\Bbbk[x]/(g_i)$ класс $[f]_{g_i} \cdot [G_i]_{g_i}^{-1}$, т. е. все ингредиенты формулы (4-2) однозначно определяются многочленами f и $g_1, g_2, \dots, g_n$. □

Предложение 4.2

Любую дробь вида f/g^m, в которой $\deg f < \deg(g^m) = m \deg g$, можно *единственным образом* представить в виде суммы

$$\frac{f}{g^m} = \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{g^2} + \dots + \frac{f_m}{g^m}\,, \tag{4-3}$$

где каждый числитель f_i имеет степень $\deg f_i < \deg g$.

Доказательство. Представление (4-3) равносильно представлению многочлена f в виде

$$f = f_1 g^{m-1} + f_2 g^{m-2} + \dots + f_{m-1} g + f_m\,, \tag{4-4}$$

аналогичном представлению целого числа f в g-ичной позиционной системе исчисления: f_m равен остатку от деления на g самого многочлена f, f_{m-1} — остатку от деления на g частного $(f - f_m)/g$, f_{m-2} — остатку от деления на g частного $\big((f - f_m)/g - f_{m-1}\big)/g$ и т. д. □

4.2.1. Разложение на простейшие дроби. Из предыдущих двух лемм вытекает, что любая дробь $f/g \in \Bbbk(x)$ допускает *единственное* представление в виде суммы многочлена степени $\deg f - \deg g$ (неполного частного от деления f на g) и дробей вида p/q^m, где q пробегает множество неприводимых делителей знаменателя, m меняется от 1 до кратности вхождения неприводимого множителя q в разложение многочлена g на неприводимые множители, а каждый числитель p имеет степень $\deg p < \deg q$. Такое представление называется *разложением f/g на простейшие дроби* и часто оказывается полезным при вычислениях с рациональными функциями.

Пример 4.3

Вычислим первообразную[1] и 2013-ю производную от $1/(1+x^2)$. Для этого разложим эту дробь в сумму простейших в поле $\mathbb{C}(x)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{\alpha}{1+ix} + \frac{\beta}{1-ix}\,, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,.$$

[1] точное (и чисто алгебраическое) определение первообразной от степенного ряда (и в частности, от рациональной функции) см. в n° 4.4 на стр. 55

Подставляя $x = \pm i$ в равенство $1 = \alpha(1-ix) + \beta(1+ix)$, находим $\alpha = \beta = 1/2$, т. е.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right).$$

Теперь уже легко вычислить как 2013-ю производную:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{2013} \frac{1}{1+x^2} = \frac{2013!}{2}\left(\frac{(-i)^{2013}}{(1+ix)^{2014}} + \frac{i^{2013}}{(1-ix)^{2014}}\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\cdot 2013!\cdot\frac{(1+ix)^{2014}-(1-ix)^{2014}}{(1+x^2)^{2014}} = 2013!\cdot\sum_{\nu=0}^{1006}\binom{2014}{2\nu+1}\cdot\frac{x^{2\nu+1}}{(1+x^2)^{2014}},$$

так и первообразную:

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+ix} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-ix} = \frac{1}{2}\big(\ln(1+ix)+\ln(1-ix)\big) = \ln\sqrt{1+x^2}\,.$$

Написанные равенства суть равенства в кольце $\mathbb{C}[\![x]\!]$, и их точный смысл мы ещё обсудим ниже.

4.3. Разложение рациональных функций в степенные ряды. В силу универсального свойства поля частных, поле рациональных функций $\Bbbk(x)$ единственным образом вкладывается в поле рядов Лорана $\Bbbk((x))$ так, что при этом многочлены переходят в многочлены. С практической точки зрения это вложение представляет собою разложение рациональных функций f/g в формальные степенные ряды. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, такое разложение можно описать довольно явными формулами.

А именно, пусть $\deg f < \deg g$ и знаменатель дроби f/g имеет вид:

$$g(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \prod(1-\alpha_ix)^{m_i}\,, \tag{4-5}$$

где все числа $\alpha_i \in \Bbbk$ попарно различны.

Упражнение 4.4. Убедитесь, что при $a_n \neq 0$ числа α_i из разложения (4-5) суть корни многочлена $t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n = \prod(t-\alpha_i)^{m_i}$.

Тогда по предл. 4.1 и предл. 4.2 функция f/g является суммой простейших дробей вида

$$\frac{\beta_{ij}}{(1-\alpha_ix)^{k_{ij}}} \tag{4-6}$$

где при каждом i показатели k_{ij} лежат в пределах $1 \leqslant k_{ij} \leqslant m_i$, а $\beta_{ij} \in \Bbbk$. Если все кратности $m_i = 1$, константы β_i в получающемся разложении

$$\frac{f(x)}{(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_nx)} = \frac{\beta_1}{1-\alpha_1x} + \frac{\beta_2}{1-\alpha_2x} + \cdots + \frac{\beta_n}{1-\alpha_nx} \tag{4-7}$$

легко указать явно: умножая обе части (4-7) на знаменатель и беря $x = \alpha_i^{-1}$, получаем

$$\beta_i = \frac{f\left(\alpha_i^{-1}\right)}{\prod\limits_{\nu\neq i}\big(1-(\alpha_\nu/\alpha_i)\big)} = \frac{\alpha_i^{n-1}f\left(\alpha_i^{-1}\right)}{\prod\limits_{\nu\neq i}\left(\alpha_i-\alpha_\nu\right)}\,. \tag{4-8}$$

Дробь $f\,/\,g$ в этом случае равна сумме геометрических прогрессий (4-7)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum \left(\beta_1\alpha_1^k + \beta_2\alpha_2^k + \;\cdots\; + \beta_n\alpha_n^k\right)\cdot x^k\,.$$

Для произвольной кратности $m_i = m \in \mathbb{N}$ простейшая дробь (4-6) раскладывается в ряд по формуле Ньютона для бинома *с отрицательным показателем*

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+m-1)(k+m-2)\,\cdots\,(k+1)}{(m-1)!}\cdot x^k = \sum_{k\geqslant 0}\binom{k+m-1}{m-1}\cdot x^k\,, \tag{4-9}$$

которая получается $(m-1)$-кратным дифференцированием обеих частей разложения геометрической прогрессии $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \;\ldots\,.$

Упражнение 4.5. Убедитесь, что $\left(\frac{d}{dx}\right)^m(1-x)^{-1} = m!/(1-x)^{m+1}\,.$

Таким образом, разложение простейшей дроби (4-6) имеет вид

$$\frac{\beta}{(1-\alpha_i x)^m} = \beta\sum_{k\geqslant 0}\alpha_i^k\binom{k+m-1}{m-1}\cdot x^k\,, \tag{4-10}$$

4.3.1. Решение линейных рекуррентных уравнений. Предыдущие вычисления можно использовать для отыскания «формулы k-того члена» последовательности z_k, заданной *линейным рекуррентным уравнением n-того порядка*:

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \;\cdots\; + a_n z_{k-n} = 0\,, \tag{4-11}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ — некоторые фиксированные заданные числа.

В самом деле, уравнению (4-11) при $k \geqslant n$ удовлетворяют коэффициенты z_k степенного ряда

$$\frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \;\cdots\; + a_n x^k} = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \cdots$$

Если подобрать $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ в числителе левой части так, чтобы первые n коэффициентов справа совпадали с начальным куском последовательности (4-11), и разложить полученную рациональную функцию в ряд, то мы получим явные выражения элементов последовательности z_k через k.

Пример 4.4 (числа Фибоначчи)
Найдём явное выражение через k для элементов последовательности

$$z_0 = 0\,,\quad z_1 = 1\,,\quad z_k = z_{k-1} + z_{k-2}\quad \text{при}\quad k \geqslant 2\,,$$

решающей рекуррентное уравнение $z_k - z_{k-1} - z_{k-2} = 0$ на коэффициенты ряда

$$\frac{b_0 + b_1 x}{1 - x - x^2} = x + z_2 x^2 + z_3 x^3 + \;\cdots \tag{4-12}$$

(мы подставили в правую часть данные по условию $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$). Умножая обе части (4-12) на общий знаменатель и сравнивая коэффициенты при x^0 и x^1, получаем $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$. Итак, нас интересуют коэффициенты ряда

$$z(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\beta_+}{1-\alpha_+ x} + \frac{\beta_-}{1-\alpha_- x}\,,$$

где $\alpha_\pm = (1\pm\sqrt{5})/2$ суть корни многочлена t^2-t-1, а числа $\beta_\pm$ находятся по формуле (4-8) с учётом равенств $\alpha_+\alpha_- = -1$, $\alpha_+ + \alpha_- = 1$ и $\alpha_+ - \alpha_- = \sqrt{5}$: $\beta_+ = -\beta_- = 1/(\alpha_+ - \alpha_-) = 1/\sqrt{5}$. Получаем:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_+ x} - \frac{1}{1-\alpha_- x}\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\alpha_+^k - \alpha_-^k}{\sqrt{5}} \cdot x^k ,$$

откуда

$$z_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}} .$$

Предложение 4.3

Всякая последовательность z_k, удовлетворяющая при $k \geqslant n$ линейному рекуррентному уравнению n-того порядка

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \cdots + a_n z_{k-n} = 0 , \tag{4-13}$$

с постоянными коэффициентами $a_i \in \mathbb{C}$, имеет вид

$$z_k = \alpha_1^k \cdot \varphi_1(k) + \alpha_2^k \cdot \varphi_2(k) + \cdots + \alpha_r^k \cdot \varphi_r(k) ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ суть все различные корни многочлена[1]

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n , \tag{4-14}$$

а каждая из функций $\varphi_i \in \mathbb{C}[x]$ представляет собою многочлен степени на единицу меньшей, чем кратность соответствующего корня α_i.

Доказательство. Ряд $\sum z_k x^k \in \mathbb{C}[\![x]\!]$, коэффициенты которого решают уравнение (4-13), является суммой дробей вида $\beta\cdot(1-\alpha x)^{-m}$, где α пробегает различные корни многочлена (4-14), показатель степени m может принимать любое значение от 1 до кратности соответствующего корня α, а $\beta = \beta(\alpha, m)$ — комплексное число, однозначно вычисляемое по α, m и первым n коэффициентам последовательности z_k. Согласно формуле (4-10) k-тый член разложения такой дроби имеет вид $\alpha^k\varphi(k)$, где $\varphi(k) = \binom{k+m-1}{m-1}$ есть многочлен от k степени $m-1$. □

4.4. Логарифм и экспонента. Всюду в этом разделе мы рассматриваем ряды с коэффициентами в поле $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. В этом случае из формулы (3-6) для производной вытекает, что для любого ряда $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ существует единственный ряд без свободного члена, производная от которого равна $f(x)$. Этот ряд называется *первообразным рядом* или *интегралом* от f и обозначается

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k . \tag{4-15}$$

[1] он называется *характеристическим многочленом* рекуррентного уравнения (4-11)

Определение 4.1
Первообразный ряд от знакопеременной геометрической прогрессии называется *логарифмом* и обозначается

$$\ln(1+x) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{1+x} = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right) dx =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k . \quad (4\text{-}16)$$

4.4.1. Логарифмирование рядов. Вместо $1 + x$ в логарифм можно подставить любой ряд $u(x)$ с единичным свободным членом — это равносильно подстановке вместо x ряда $u(x) - 1$ без свободного члена, что является алгебраической операцией. Обозначим через $N \subset \Bbbk[\![x]\!]$ аддитивную абелеву группу всех рядов без свободного члена, а через $U \subset \Bbbk[\![x]\!]$ — мультипликативную абелеву группу всех рядов с единичным свободным членом. Тогда операция *логарифмирования*, переводящая ряд $u(x) \in U$ в ряд $\ln(u(x)) \in N$, является алгебраической и задаёт отображение

$$\ln : U \to N , \quad u \mapsto \ln u . \quad (4\text{-}17)$$

Упражнение 4.6 (логарифмическая производная). Докажите для любого ряда $u \in U$ формулу $\frac{d}{dx} \ln u = u'/u$.

Лемма 4.3
Для рядов $u, w \in U$ равенства $u = w$, $u' = w'$, $\ln(u) = \ln(w)$ и $u'/u = w'/w$ попарно эквивалентны друг другу.

Доказательство. Первое равенство влечёт за собой все остальные. Поскольку ряды с равными свободными членами совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их производные, первые два равенства и последние два равенства равносильны друг другу. Остаётся показать, что из последнего равенства следует первое. Но последнее равенство утверждает, что $u'/u - w'/w = (u'w - w'u)/uw = (w/u)\cdot(u/w)' = 0$, откуда $(u/w)' = 0$, т. е. $u/w = \text{const} = 1$. □

Упражнение 4.7. Покажите, что $\forall\, u \in U \;\; \ln(1/u) = -\ln u$.

Определение 4.2
Ряд $e^x \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots$ называется *экспонентой*. Это единственный ряд в U, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$.

4.4.2. Экспоненцирование рядов. Подставляя в экспоненту вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, мы получаем ряд $e^{\tau(x)}$ со свободным членом 1, который называется *экспонентой* ряда $\tau(x)$. Этим определяется экспоненциальное отображение

$$\exp : N \to U , \quad \tau \mapsto e^{\tau} . \quad (4\text{-}18)$$

Теорема 4.2
Экспоненциальное и логарифмическое отображения (4-18) и (4-17) являются взаимно обратными изоморфизмами абелевых групп. В частности, для любых рядов $u, u_1, u_2 \in U$ и $\tau, \tau_1, \tau_2 \in N$ выполняются тождества:

$$\ln e^{\tau} = \tau , \quad e^{\ln u} = u , \quad \ln(u_1 u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2) , \quad e^{\tau_1+\tau_2} = e^{\tau_1} e^{\tau_2} .$$

Доказательство. Равенство $\ln e^{\tau} = \tau$ проверяется взятием производной, а $e^{\ln u} = u$ — логарифмической производной от обеих частей. Поэтому экспоненцирование и логарифмирование суть взаимно обратные биекции. Ряды $\ln(u_1 u_2)$ и $\ln u_1 + \ln u_2$ совпадают, поскольку имеют нулевые свободные члены и равные производные:

$$\big(\ln(u_1u_2)\big)' = \frac{(u_1u_2)'}{u_1u_2} = \frac{u_1'u_2 + u_1u_2'}{u_1u_2} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} = \big(\ln u_1 + \ln u_2\big)'\,.$$

Поэтому логарифмирование — гомоморфизм, а значит, и обратное к нему отображение тоже гомоморфизм. □

Упражнение 4.8. Докажите в $\Bbbk[\![x,y]\!]$ равенство $e^{x+y} = e^x e^y$ непосредственным сравнением коэффициентов этих двух рядов.

4.5. Степенная функция и бином Ньютона. В этом разделе мы продолжаем считать, что $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Для любого числа $\alpha \in \Bbbk$ определим *биномиальный ряд* с показателем α формулой

$$(1+x)^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha\ln(1+x)}.$$

Подставляя вместо $1+x$ произвольные ряды $u \in U$, мы для любого числа $\alpha \in \Bbbk$ получаем алгебраическую операцию $U \to U$ *возведения в α-тую степень* $u \mapsto u^{\alpha}$, обладающую всеми интуитивно ожидаемыми от степенной функции свойствами: для любых рядов $u, v \in U$ и чисел $\alpha, \beta \in \Bbbk$ выполняются равенства

$$u^{\alpha}\cdot u^{\beta} = e^{\alpha\ln u}\cdot e^{\beta\ln u} = e^{\alpha\ln u + \beta\ln u} = e^{(\alpha+\beta)\ln u} = u^{\alpha+\beta} \tag{4-19}$$

$$\big(u^{\alpha}\big)^{\beta} = e^{\beta\ln(u^{\alpha})} = e^{\beta\ln\left(e^{\alpha\ln u}\right)} = e^{\alpha\beta\ln u} = u^{\alpha\beta} \tag{4-20}$$

$$(uv)^{\alpha} = e^{\alpha\ln(uv)} = e^{\alpha(\ln u + \ln v)} = e^{\alpha\ln u + \alpha\ln v} = e^{\alpha\ln u}\cdot e^{\alpha\ln v} = u^{\alpha}v^{\alpha} \tag{4-21}$$

В частности, для любого ряда u с единичным свободным членом $u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$ в том смысле, что $\left(u^{1/n}\right)^n = u$. Для явного отыскания коэффициентов a_i биномиального ряда

$$(1+x)^{\alpha} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

вычислим его логарифмическую производную:

$$\frac{\big((1+x)^{\alpha}\big)'}{(1+x)^{\alpha}} = \big(\ln(1+x)^{\alpha}\big)' = \big(\alpha\ln(1+x)\big)' = \frac{\alpha}{1+x}\,.$$

Приводя левую и правую часть к общему знаменателю, получаем соотношение

$$\big(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \,\cdots\,\big)\cdot(1+x) = \alpha\cdot(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \,\cdots\,)\,.$$

Сравнивая коэффициенты при x^{k-1} в правой и левой части, приходим к рекуррентному соотношению $ka_k + (k-1)a_{k-1} = \alpha a_{k-1}$, из которого

$$a_k = \frac{\alpha-(k-1)}{k}\cdot a_{k-1} = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))}{k(k-1)}\cdot a_{k-2} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))\cdots(\alpha-1)\alpha}{k!}\,.$$

Стоящая в правой части дробь имеет в числителе и знаменателе по k множителей, представляющих собою последовательно уменьшающиеся на единицу числа: в знаменателе — от k до 1, в числителе — от α до $(\alpha - k + 1)$. Эта дробь называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{\alpha}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{4-22}$$

Нами доказано

Предложение 4.4 (формула Ньютона)
Для любого числа $\alpha \in \Bbbk$ имеется разложение

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k\geqslant 0}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots \; .$$

Пример 4.5 (бином с рациональным показателем)
При натуральном значении показателя $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется лишь конечное число ненулевых биномиальных коэффициентов, поскольку при $k > n$ в числителе (4-22) образуется нулевой сомножитель. Поэтому разложение бинома в этом случае конечно:

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \;\cdots\; + x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k \; .$$

При целом отрицательном $\alpha = -m$, $m \in \mathbb{N}$, мы снова получаем разложение (4-9) со стр. 54

$$(1+x)^{-m} = 1 - m\,x + \frac{m(m+1)}{2}\,x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\,x^3 + \cdots = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{k+m-1}{k}\cdot x^k \; .$$

При $\alpha = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, формула Ньютона разворачивает в степенной ряд радикал

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}\,x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}\,x^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{6}\,x^3 + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{n^3} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{x^4}{n^4} + \cdots$$

Например, при $n = 2$ в качестве коэффициента при x^k мы получаем дробь вида

$$(-1)^{k-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\cdots\,\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\,\cdots\,\cdot(2k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{(2k)!}{(2\cdot 4\cdot 6\,\cdots\,\cdot(2k))^2} =$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)\cdot 4^k}\cdot\binom{2k}{k}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\binom{2k}{k}\cdot\frac{x^k}{4^k}\; . \tag{4-23}$$

Пример 4.6 (числа Каталана)
Воспользуемся разложением (4-23) для получения явной формулы для *чисел Каталана*, часто возникающих в различных комбинаторных задачах. Пусть при вычислении произведения $(n+1)$ сомножителей

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \qquad \text{(всего } n \text{ умножений)} \tag{4-24}$$

в каждый момент времени разрешается делать не более одного умножения. Если на каждом шагу заключать вычисленное произведение в скобки, мы расставим в выражении (4-24) n пар скобок ( ). Количество всех различных расстановок скобок, возникающих таким образом, называется n-ым *числом Каталана* c_n. При $n = 1$ есть лишь одна расстановка скобок: $(a_1 a_2)$, при $n = 2$ — две: $(a_1(a_2 a_3))$ и $((a_1 a_2)a_3)$, при $n = 3$ — пять:

$$(a_1(a_2(a_3a_4)))\,,\ (a_1((a_2a_3)a_4))\,,\ ((a_1a_2)(a_3a_4))\,,\ ((a_1(a_2a_3))a_4)\,,\ (((a_1a_2)a_3)a_4)\,.$$

Множество всех возможных расстановок скобок в (4-24) распадается в дизъюнктное объединение n подмножеств, в которых конфигурации наружных скобок имеют вид

$$(a_0(a_2 \dots a_n))\,,\ ((a_0a_1)(a_2 \dots a_n))\,,\ ((a_0 \dots a_2)(a_3 \dots a_n))\,,\ ((a_0 \dots a_3)(a_4 \dots a_n))\,,\ \dots$$
$$\dots\,,\ ((a_0 \dots a_{n-2})(a_{n-1}a_n))\,,\ ((a_0 \dots a_{n-1})a_n)$$

и которые состоят, соответственно, из $c_{n-1}\,,\ c_1c_{n-2}\,,\ c_2c_{n-3}\,,\ c_3c_{n-4}\,,\ \dots\,,\ c_{n-2}c_1\,,\ c_{n-1}$ элементов. Если добавить к числам Каталана число $c_0 = 1$, то мы получим рекурсивное соотношение $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-2}c_1 + c_{n-1}c_0$ на коэффициенты c_n *ряда Каталана*

$$c(x) = \sum_{k\geqslant 0} c_k x^k = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[\![x]\!]\,,$$

означающее, что $c(x)^2 = (c(x)-1)/x$. Иначе говоря, $t = c(x)$ является решением квадратного уравнения $x \cdot t^2 - t - 1 = 0$ на неизвестную t в кольце $\mathbb{Z}[\![x]\!]$. В поле $\mathbb{Q}((x)) \supset \mathbb{Z}[\![x]\!]$ это уравнение решается по обычной школьной формуле, дающей два корня $(1 \pm \sqrt{1-4x})/(2x)$. Согласно (4-23), $\sqrt{1-4x} = -\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2k-1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot x^k = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - 10x^4 - \dots$. Поэтому $(1 + \sqrt{1-4x})/(2x)$ не лежит в $\mathbb{Z}[\![x]\!]$: ряд $1 + \sqrt{1-4x}$ имеет ненулевой свободный член и не делится на $2x$ в $\mathbb{Z}[\![x]\!]$. Тем самым, $c(x) = (1 - \sqrt{1-4x})/(2x)$ и

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \binom{2k+2}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k}.$$

Отметим, что с первого взгляда не вполне понятно, что это число — целое.

4.6. Ряд Тодда и числа Бернулли. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ от переменной x и кольцо многочленов $\mathbb{Q}[t]$ от переменной t. Обозначим через

$$D = \frac{d}{dt}\ :\ \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{g \mapsto g'} \mathbb{Q}[t]$$

оператор дифференцирования, и для каждого степенного ряда $\Phi(x) = \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k x^k \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ определим результат подстановки в Φ вместо x оператора D как отображение

$$\Phi(D)\ :\ \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]\,,\quad f \mapsto \varphi_0 \cdot f + \varphi_1 \cdot f' + \varphi_2 \cdot f'' + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \cdot D^k(f)\,. \tag{4-25}$$

Поскольку каждое дифференцирование уменьшает степень многочлена на единицу, все слагаемые в правой части (4-25) обратятся в нуль при $k > \deg f$. Таким образом, для каждого многочлена $f \in \mathbb{Q}[t]$, правая часть (4-25) является корректно определённым многочленом, каждый коэффициент которого вычисляется конечным числом арифметических операций над коэффициентами исходного многочлена f и первыми $\deg(f)$ коэффициентами ряда Φ. Отображение

$$\mathrm{ev}_D : \mathbb{Q}[\![x]\!] \to \mathrm{End}(\mathbb{Q}[t]), \quad \Phi(x) \mapsto \Phi(D), \tag{4-26}$$

является гомоморфизмом коммутативного кольца $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ в (некоммутативную) алгебру *линейных эндоморфизмов* пространства многочленов в том смысле, что все отображения $\Phi(D)$ *линейны*:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\ \forall\, f, g \in \mathbb{Q}[t] \quad \Phi(D)(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \Phi(D)f + \beta \cdot f(D)g \tag{4-27}$$

и суммы и произведения рядов переходят в суммы и *композиции* соответствующих отображений. Последнее означает, что при подстановке D в произведение $\Phi(x)\Psi(x) \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ получится *композиция* отображений $\Phi(D) \circ \Psi(D) = \Psi(D) \circ \Phi(D)$. В частности, все отображения $\Phi(D)$ перестановочны друг с другом, и отображение $\Phi(D)$ биективно тогда и только тогда, когда степенной ряд $\Phi(x) \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ имеет ненулевой свободный член.

Упражнение 4.9. Проверьте все эти утверждения.

В силу линейности (4-27) для вычисления значения отображения

$$\Phi(D) = \varphi_0 + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2 + \cdots : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$$

на произвольном многочлене достаточно уметь вычислять его на всех одночленах t^m:

$$\Phi(D)\left(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\right) = a_0 + a_1 \Phi(D)t + a_2 \Phi(D)t^2 + \cdots + a_n \Phi(D)t^n .$$

Для каждого k многочлен $\Phi_k(t) \overset{\text{def}}{=} \Phi(D)t^k \in \mathbb{Q}[t]$ имеет степень $\leqslant k$ и зависит лишь от первых $k+1$ коэффициентов ряда Φ. Он называется k-тым *многочленом Аппеля* ряда Φ.

Пример 4.7 (операторы сдвига)
Экспонента $e^D = 1 + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \ldots$ имеет многочлены Аппеля

$$e^D t^m = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} D^k t^m = \sum_{k \geqslant 0} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\, t^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^{m-k} = (t+1)^m .$$

Следовательно, оператор e^D действует на любой многочлен как *оператор сдвига*:

$$e^D : f(t) \mapsto f(t+1) .$$

Так как ряды e^x и e^{-x} обратны друг другу в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$, операторы e^D и e^{-D} тоже обратны друг другу, т. е.

$$e^{-D} : f(t) = f(t-1) .$$

Упражнение 4.10. Убедитесь, что $e^{\alpha D} f(t) = f(t+\alpha)$ при любом $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Пример 4.8 (вычисление степенных сумм)
Для произвольно зафиксированного $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ рассмотрим сумму

$$S_m(n) \overset{\text{def}}{=} 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \sum_{k=0}^{n} k^m \tag{4-28}$$

как функцию от n. Так,

$$\begin{aligned} S_0(n) &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n \\ S_1(n) &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2 \\ S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \\ S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4 = S_1(n)^2 \,. \end{aligned}$$

Применяя к этой функции *разностный оператор* $\nabla : \varphi(t) \mapsto \varphi(t) - \varphi(t-1)$, мы получим многочлен $\nabla S_m(t) = t^m$. Покажем, что в $\mathbb{Q}[t]$ существует единственный многочлен $S_m(t)$ с нулевым свободным членом, такой что $\nabla S_m(t) = t^m$. Тогда его значения при целых неотрицательных $t = 0, 1, 2, \dots$ автоматически окажутся равными суммам (4-28).

Согласно прим. 4.7, действие ∇ на пространстве многочленов $\mathbb{Q}[t]$ задаётся рядом

$$\nabla = 1 - e^{-D} = \frac{1 - e^{-D}}{D} \circ D \,.$$

Ряд $(1 - e^{-x})/x$ имеет свободный член 1 и обратим в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$. Обратный ему ряд

$$\operatorname{td}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{1 - e^{-x}} \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$$

называется *рядом Тодда*. Подставляя $x = D$ в равенство $\operatorname{td}(x) \cdot (1 - e^{-x}) = x$, получаем соотношение $\operatorname{td}(D) \circ \nabla = D$. Стало быть, производная

$$S'_m(t) = DS_m(t) = \operatorname{td}(D)\nabla S_m(t) = \operatorname{td}(D)t^m$$

является многочленом Аппеля ряда Тодда, а искомый многочлен $S_m(t)$ является его первообразной. Для её вычисления удобно записать ряд Тодда в «экспоненциальной форме», вынеся из коэффициентов обратные факториалы:

$$\operatorname{td}(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_k}{k!} x^k. \tag{4-29}$$

Окончательно, сумма m-тых степеней первых t натуральных чисел равна[1]

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k!} D^k t^m \Big) \, dt = \int \Big(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k t^{m-k} \Big) \, dt = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{a_k t^{m-k+1}}{m-k+1} = \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\binom{m+1}{1} a_m t + \binom{m+1}{2} a_{m-1} t^2 + \dots + \binom{m+1}{m} a_1 t^m + \binom{m+1}{m+1} a_0 t^{m+1} \right) \,. \end{aligned}$$

Коэффициенты a_k находятся из соотношения $\operatorname{td}(x) \cdot (1 - e^{-x})/x = 1$:

$$\left(1 + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^2 + \frac{a_4}{24} x^4 + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{24} x^3 + \frac{1}{120} x^4 - \dots \right) = 1 \,.$$

[1] эту формулу иногда представляют в символическом виде $(m+1) \cdot S_m(t) = (a\!\downarrow + t)^{m+1} - a_{m+1}$, где стрелка у $a\!\downarrow$ предписывает заменять a^k на a_k при раскрытии бинома $(a+t)^{m+1}$

Упражнение 4.11. Найдите первую дюжину чисел a_k, напишите явные формулы для $S_4(n)$ и $S_5(n)$ и вычислите[1] $S_{10}(1000)$.

4.6.1. Числа Бернулли. Название «ряд Тодда» вошло в обиход во второй половине XX века после работ Хирцебруха и Гротендика, где он был применён для формулировки и доказательства теоремы Риана – Роха. Во времена Бернулли и Эйлера предпочитали пользоваться рядом

$$\operatorname{td}(-x) = \frac{x}{e^x - 1},$$

который отличается от ряда $\operatorname{td}(x)$ ровно одним коэффициентом:

$$\operatorname{td}(-x) - \operatorname{td}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} + \frac{x}{1-e^x} = x \cdot \frac{2 - e^x - e^{-x}}{(1-e^{-x})\cdot(1-e^x)} = x\,,$$

т. е. член степени 1 в $\operatorname{td}(x)$ равен $x/2$, а в $\operatorname{td}(-x)$ равен $-x/2$, и это *единственный* ненулевой член нечётной степени в обоих рядах. Коэффициенты B_k в «экспоненциальной» записи ряда

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{B_k}{k!}\,x^k$$

называются *числами Бернулли*. Таким образом, $B_k = a_k$ при $k \neq 1$ и обращаются в нуль при всех нечётных $k \geqslant 3$, а $B_1 = -a_1 = -1/2$. Со времён своего открытия Яковом Бернулли, числа B_k вызывают неослабевающий интерес. Им посвящена обширная литература[2] и даже специальный интернет-ресурс `http://www.bernoulli.org/`, на котором, среди прочего, имеется программа для быстрого вычисления чисел B_k в виде несократимых рациональных дробей. Однако, не смотря на огромное количество красивых теорем о числах Бернулли, никакой внятной формулы, явно выражающей B_n через n нет, и любой содержательный новый взгляд в этом направлении был бы интересен.

Упражнение 4.12. Получите для чисел Бернулли рекурсивную формулу

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\cdot B_k\,.$$

4.6.2. Разностные операторы на пространстве многочленов. Для каждого формального степенного ряда $\Phi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ можно, как и выше, определить оператор

$$\Phi(\nabla) : \Bbbk[t] \to \Bbbk[t]\,, \quad f(x) \mapsto \sum_{\nu\geqslant 0} \varphi_\nu \nabla^\nu f\,. \tag{4-30}$$

Упражнение 4.13. Проверьте, что $\forall\, f \in \mathbb{Q}[t] \quad \deg(\nabla f) < \deg(f)$ (так что правая часть (4-30) является корректно определённым многочленом) и представьте оператор дифференцирования $D = d/dx$ в виде ряда (4-30) без свободного члена.

[1] Яков Бернулли (1654–1705) при помощи одних лишь пера и бумаги просуммировал десятые степени первой тысячи натуральных чисел примерно за 7 минут, о чём не без гордости написал в своём манускрипте «Ars Conjectandi», опубликованном в 1713 году уже после его кончины

[2] начать знакомство с которой я советую с гл. 15 книги *К. Айрлэнд, М. Роузен.* «Классическое введение в современную теорию чисел» и § 8 гл. V книги *З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич.* «Теория чисел»

Предложение 4.5
Следующие условия на линейный оператор $F : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[x]$ попарно эквивалентны:

1) $F \circ \nabla = \nabla \circ F$
2) $F \circ T = T \circ F$, где $T : f(x) \mapsto f(x-1)$
3) $\forall\, \alpha \in \mathbb{Q} \quad F \circ T_\alpha = T_\alpha \circ F$, где $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x-\alpha)$
4) $F = \Phi(D)$ для некоторого $\Phi \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$
5) $F = \Psi(\nabla)$ для некоторого $\Psi \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$.

Определение 4.3
Оператор $F : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$, удовлетворяющий условиям предл. 4.5, называется *разностным оператором* на пространстве многочленов.

Доказательство предл. 4.5. Импликации (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (5). Рассмотрим многочлены

$$\gamma_0 \equiv 1 \quad \text{и} \quad \gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \binom{x+k}{k} = \frac{1}{k!}(x+1)(x+2)\,\cdots\,(x+k) \quad (\text{при } k > 0)\,. \tag{4-31}$$

Упражнение 4.14. Проверьте, что $\forall\, k \geqslant 1\ \nabla\gamma_k = \gamma_{k-1}$ и что любой многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ однозначно записывается в виде $f = \sum_k c_k \gamma_k$ с $c_k \in \mathbb{Q}$, причём константы $c_k = \nabla^k f(-1)$.

Пусть значение многочлена $F(\gamma_k)$ при $x = -1$ равно a_k. По упр. 4.14

$$F(\gamma_k) = \sum_{\nu \geqslant 0} \lambda_\nu \gamma_\nu\,,$$

где $\lambda_\nu = \nabla^\nu F\gamma_k\,(-1) = F\nabla^\nu\,\gamma_k\,(-1) = F\gamma_{k-\nu}(-1) = a_{k-\nu}$. Мы заключаем, что $a_\nu = 0$ при $\nu > k$ и $F(\gamma_k) = \sum_{\nu=0}^{k} a_{k-\nu}\gamma_\nu = \sum_{\alpha \geqslant 0} a_\alpha \nabla^\alpha\,\gamma_k$. Таким образом, F действует на многочлены γ_k точно также, как оператор $\sum_\alpha a_\alpha \nabla^\alpha$. Поэтому $F = \sum_\alpha a_\alpha \nabla^\alpha$. □

4.7. Дробно степенные ряды. Ряд Лорана от переменной $x^{1/q}$

$$\sum_{k \geqslant m} a_k x^{k/q}\,, \quad a_k \in \Bbbk\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

называется *дробно-степенным рядом* или *рядом Пюизо*. Иначе можно сказать, что ряд Пюизо — это степенной ряд с ограниченными снизу рациональными показателями степеней, имеющими общий знаменатель. Также как и ряды Лорана, дробно-степенные ряды с коэффициентами в поле $\Bbbk$ образуют поле. Основным результатом этого раздела является

Теорема 4.3
Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль, то поле рядов Пюизо тоже алгебраически замкнуто.

Лемма 4.4 (лемма Гензеля)
Пусть $G(t,x) \in \Bbbk[\![t]\!]\,[x]$ является приведённым многочленом от переменной x с коэффициентами в формальных степенных рядах от переменной t над произвольным полем $\Bbbk$. Если при $t = 0$ многочлен $G(0,x) \in \Bbbk[x]$ раскладывается в $\Bbbk[x]$ в произведение взаимно простых приведённых множителей $a(x)$ и $b(x)$ положительных степеней, то и $G(t,x)$ раскладывается в $\Bbbk[\![t]\!][x]$ в произведение приведённых многочленов $A(t,x)$ и $B(t,x)$ тех же степеней по x, что $a(x)$ и $b(x)$, и таких, что $A(0,x) = a(x)$ и $B(0,x) = b(x)$.

Доказательство. Запишем данный ряд $G(t,x)$ и искомые ряды $A(t,x)$ и $B(t,x)$ в виде рядов от переменной t с коэффициентами в $\Bbbk[x]$:

$$\begin{aligned} G(t,x) &= g_0(x) + g_1(x)\,t + g_2(x)\,t^2 + \cdots \\ A(t,x) &= a_0(x) + a_1(x)\,t + a_2(x)\,t^2 + \cdots \\ B(t,x) &= b_0(x) + b_1(x)\,t + b_2(x)\,t^2 + \cdots \end{aligned}$$

и приравняем коэффициенты при t^k в равенстве $G_t(x) = A_t(x) \cdot B_t(x)$:

$$\begin{aligned} a_0(x)\,b_0(x) &= g_0(x) && (\text{при } k = 0) \\ a_0(x)\,b_k(x) + b_0(x)\,a_k(x) &= g_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} a_i(x)\,b_{k-i}(x) && (\text{при } k \geqslant 1)\,. \end{aligned} \tag{4-32}$$

Взаимно простые многочлены $a_0(x) = a(x)$ и $b_0(x) = b(x)$, удовлетворяющие первому равенству, даны по условию. Второе равенство однозначно определяет многочлены a_k и b_k степеней $\deg a_k < \deg a$ и $\deg b_k < \deg b$, как только известны все предыдущие многочлены a_i и b_i и известно, что $\deg a_i < \deg a$ и $\deg b_i < \deg b$ при всех $i < k$. В самом деле, раз G приведён как многочлен от x, то $\deg g_i < \deg g_0$ при всех $i > 0$ и степень многочлена из правой части формулы (4-32) строго меньше $\deg a_0 \cdot \deg b_0$. Тем самым, b_k — это единственный многочлен степени $< \deg b_0$ класс которого по модулю b_0 равен отношению класса правой части формулы (4-32) к классу $a_0 \pmod{b_0}$, а класс a_k играет аналогичную роль по модулю a_0 (ср. с доказательством предл. 4.1). □

Упражнение 4.15. Покажите, что построенные многочлены A и B взаимно просты в кольце $\Bbbk[\![t]\!]\,[x]$.

Лемма 4.5
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль для любого многочлена

$$F(t,x) = a_n(t)\,x^n + a_{n-1}(t)\,x^{n-1} + \cdots + a_0(x) \in \Bbbk((t))\,[x]$$

от переменной x с коэффициентами в поле $\Bbbk((t))$ существуют число $m \in \mathbb{N}$ и ряд Лорана $\vartheta(t) \in \Bbbk((t))$, такие что $F\left(t^m, \vartheta(t)\right) = 0$ в поле $\Bbbk((t))$. Иными словами, каждый многочлен с коэффициентами в поле рядов Лорана от t после замены параметра t параметром t^m с надлежащим[1] $m \in \mathbb{N}$ приобретает в поле $\Bbbk((t))$ корень.

Доказательство. Не ограничивая общности мы можем и будем далее считать, что многочлен F имеет коэффициенты в $\Bbbk[\![t]\!]$, причём старший коэффициент $a_n = 1$, а следующий

[1] т. е. после извлечения из параметра корня должной степени

за ним коэффициент $a_{n-1} = 0$: первого можно добиться, умножив F на подходящую степень t, второго — умножив полученный многочлен на a_n^{n-1} и заменив x на $y = a_n x$, третьего — заменив y на $z = y - a_{n-1}/n$.

Упражнение 4.16. Убедитесь, что в каждом из трёх случаев умение находить корень для изменённого многочлена позволяет найти его и для исходного многочлена.

Если $F(t,x) = x^n$, мы можем взять $q = 1$ и $\vartheta = 0$. Поэтому мы будем далее считать, что среди коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ есть ненулевые ряды. Если F приводим, мы можем воспользоваться индукцией по $\dim F$ и подобрать m и ϑ для многочлена меньшей степени, делящего F. Таким образом, нам надо сделать многочлен F приводимым. По лемме Гензеля для этого достаточно, чтобы многочлен $F(0,x) \in \Bbbk[x]$ раскладывался в $\Bbbk[x]$ на два взаимно простых множителя положительной степени. Над алгебраически замкнутым полем этого нельзя сделать лишь тогда, когда $F(0,x) = (x-\alpha)^n$ для некоторого $\alpha \in \Bbbk$. Но многочлен $(x-\alpha)^n$ либо равен x^n, либо содержит член $n\alpha x^{n-1} \neq 0$ (здесь существенно, что $\operatorname{char} \Bbbk = 0$). По нашему предположению, F не содержит x^{n-1}, и нам остаётся добиться, чтобы хоть один из рядов $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ не обращался в нуль при $t = 0$.

Для этого запишем ненулевые коэффициенты многочлена F в виде

$$a_m(t) = \alpha_{\mu_m} t^{\mu_m} + \text{члены большей степени по } t \;, \quad \text{где} \quad \alpha_{\mu_m} \neq 0 \,,$$

выберем из дробей μ_m/m наименьшую, обозначим через p/q её несократимую запись и сделаем в многочлене

$$F(t,x) = x^n + \sum_{m=0}^{n-2} a_m(t)\, x^m$$

подстановку $t \leftarrow t^q$, $x \leftarrow t^p y$. Получим многочлен

$$G(t,y) = F(t^q, t^p y) = t^{pn}\, y^n + \sum_{m=0}^{n-2} a_m(t^q)\, t^{pm}\, y^m =$$
$$= t^{pn}\Big(y^n + \sum_{m=0}^{n-2} t^{q\mu_m - pm}\, (\alpha_{\mu_m} + \text{члены, делящиеся на } t\,) \cdot y^m\,\Big) \,.$$

Так как $q\mu_m \geqslant pm$ для всех m, ряды-коэффициенты в правой сумме лежат в $\Bbbk[\![t]\!]$, и по крайней мере один из них — тот, у которого $q\mu_m = pm$, — отличен от нуля при $t = 0$.

Тем самым, приведённый многочлен $G(t,y)/(t^{pn})$ раскладывается в $\Bbbk[\![t]\!]\,[y]$ в произведение многочленов меньшей степени, и по индукции существуют число $d \in \mathbb{N}$ и ряд Лорана $\tau(t)$, для которых $G\left(t^d, \tau(t)\right) = 0$ в $\Bbbk((t))$. Тогда для $m = qd$ и $\vartheta(t) = t^p\,\tau(t)$ выполняется нужное нам равенство $F\left(t^m, \vartheta(t)\right) = F\left(t^{qd}, t^p\,\tau(t)\right) = G\left(t^d, \tau(t)\right) = 0$. □

Упражнение 4.17. Выведите теор. 4.3 из лем. 4.5.

Замечание 4.3. В доказательстве лем. 4.5 мы явно воспользовались условием $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, и без этого предположения лем. 4.5 (а с нею и теор. 4.3) неверна.

Пример 4.9
Рассмотрим уравнение $x^p - x = t^{-1}$ над полем $\mathbb{F}_p((t))$, и будем искать его решение в виде $x(t) = a_1 t^{\lambda_1} + a_2 t^{\lambda_2} + \cdots$ с рациональными $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ и $a_i \neq 0$. Поскольку $a^p = a$ для

всех $a \in \mathbb{F}_p$, подставляя ряд в домноженное на t уравнение $t\,x^p - t\,x = 1$, мы получаем

$$-a_1 t^{\lambda_1+1} + a_2 t^{\lambda_2+1} - a_1 t^{p\lambda_1+1} + a_3 t^{\lambda_3+1} - a_2 t^{p\lambda_2+1} + \text{старшие члены}\,.$$

Поскольку младшему члену $a_1 t^{\lambda_1+1}$ не с чем сократиться кроме единицы в правой части, мы заключаем, что $\lambda_1 = -1$ и $a_1 = -1$. Следующие два члена обязаны сокращать друг друга, откуда $\lambda_2 = -1/p$ и $a_2 = a_1$, следующие два члена также обязаны сокращать друг друга, откуда $\lambda_3 = -1/p^2$ и $a_3 = a_2$, и т. д. В результате получаем ряд

$$x(t) = -t^{-1} - t^{-1/p} - t^{-1/p^2} - t^{-1/p^3} - \cdots = -\sum_{k\geqslant 0} t^{-p^k}\,,$$

который не является рядом Пиюзо, т. к. у его показателей нет общего знаменателя.

4.7.1. Метод Ньютона для явного отыскания рядов Пюизо $x_1(t), \dots, x_n(t)$, являющихся корнями заданного многочлена

$$F(t,x) = a_n(t)\,x^n + a_{n-1}(t)\,x^{n-1} + \cdots + a_0(x) \in \Bbbk[\![t]\!][x] \tag{4-33}$$

заключается в следующем. Сначала находим все корни многочлена $F(0,x) \in \Bbbk[x]$, получающегося из F при $t = 0$, и для каждого такого корня ξ делаем замену $x \leftarrow\!\shortmid \xi + x$. После этого $x = 0$ становится корнем $F(0,x)$, и мы будем искать продолжающий этот нулевой корень ряд Пюизо в виде

$$x(t) = c_1 t^{\varepsilon_1} + c_2 t^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + c_3 t^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} + \cdots \tag{4-34}$$

с положительными $\varepsilon_i \in \mathbb{Q}$ и ненулевыми $c_i \in \Bbbk$. На координатной плоскости отметим все такие целые точки (p,q), что моном[1] $x^p t^q$ входит в $F(t,x)$ с ненулевым коэффициентом, и возьмём их выпуклую оболочку. Полученная фигура называется *многоугольником Ньютона* многочлена $F(t,x)$. Видимая из начала координат часть границы многоугольника Ньютона представляют собою ломаную, все вершины которой располагаются в некоторых из точек (m,μ_m), отвечающих младшим по t членам коэффициентов

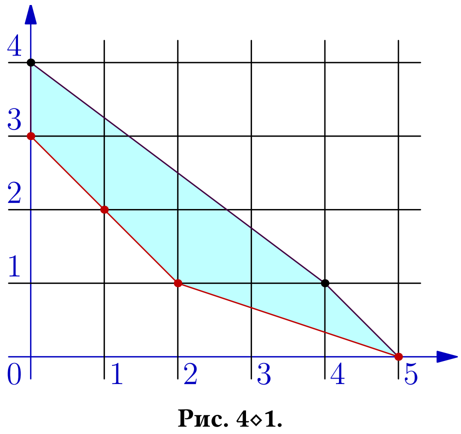

Рис. 4◇1.

$$a_m(t) = \alpha_{\mu_m}\,t^{\mu_m} + \text{старшие степени } t$$

многочлена $F(t,x) = \sum_m a_m(t)\,x^m$. Мы будем называть эту ломаную *ломаной Ньютона*. На рис. 4◇1 показан многоугольник Ньютона многочлена

$$(-t^3 + t^4) - 2t^2\,x - t\,x^2 + 2t\,x^4 + x^5\,. \tag{4-35}$$

Его ломаная Ньютона состоит из двух красных отрезков.

Упражнение 4.18. Приведите пример такого многочлена, что не все точки (m,μ_m) лежат на ломаной Ньютона.

[1] обратите внимание, что мы откладываем показатели при x вдоль *горизонтальной* оси

Подставим ряд (4-34) вместо x в многочлен $F(t,x)$. Младшие по t члены в $x^m(t)$ и $a_m(t)$ перемножатся в одночлен

$$a_{\mu_m} c_1^m t^{m\varepsilon_1+\mu_m} \,. \tag{4-36}$$

Несколько таких одночленов можно сократить друг с другом за счёт надлежащего подбора коэффициента c_1 у ряда (4-34), если и только если они имеют один и тот же показатель при t, т. е. когда у них одно и то же значение $m\varepsilon_1 + \mu_m$. Такие одночлены происходят из мономов $x^p t^q$, лежащих на прямой $p\varepsilon_1 + q = \text{const}$, содержащей одно из звеньев ломаной Ньютона. Таким образом, в качестве показателя ε_1 должно выступать отношение α/β координат вектора $n = (\alpha, \beta)$, перпендикулярного какому-нибудь звену ломаной Ньютона. И чтобы одночлены (4-36), приходящие из всех лежащих на выбранном звене мономов $x^p t^q$, сократились друг с другом, константа c_1, отвечающая такому ребру, должна удовлетворять уравнению

$$a_{\mu_k} + b_{\mu_{k+1}} c_1 + b_{\mu_{k+2}} c_1^2 + \cdots + b_{\mu_{k+\ell-1}} c_1^{\ell-1} + a_{\mu_{k+\ell}} c_1^{\ell} \,, \tag{4-37}$$

где $k,\ k{+}1,\ \dots\ ,\ k{+}\ell$ суть целые точки горизонтальной оси, накрываемые горизонтальной проекцией выбранного ребра, ℓ — длина этой проекции, а коэффициенты

$$b_{\mu_{k+i}} = \begin{cases} a_{\mu_{k+i}} & \text{когда точка } (k+i, a_{\mu_{k+i}}) \text{ лежит на ребре} \\ 0 & \text{когда точка } (k+i, a_{\mu_{k+i}}) \text{ лежит выше ребра.} \end{cases}$$

Если обозначить через γ значение линейной функции $p\varepsilon_1 + q$ на выбранном ребре[1] и сгруппировать в F вместе мономы, расположенные на прямых $p\varepsilon_1 + q = \text{const}$:

$$F(t,x) = \sum_{k\geqslant\gamma} f_k(t,x) \,, \quad \text{где} \quad f_k(t,x) = \sum_{\substack{p,q\,:\\ p\varepsilon_1+q=k}} \alpha_{p,q} x^p t^q \,, \tag{4-38}$$

то уравнение (4-37) будет иметь вид $f_\gamma(1, c_1) = 0$.

Чтобы найти следующие значения ε_2 и c_2 , мы выбираем один из корней этого уравнения, подставляем в F значение $x = t^{\varepsilon_1}(c_1 + x_1)$. От такой подстановки каждое слагаемое $f_k(t,x)$ в сумме (4-38) превратится в $t^k f_k(1, c_1 + x_1)$. В результате уравнение на x_1 можно будет сократить на t^γ. Если выбранный корень c_1 имеет кратность d, т. е.

$$f_\gamma(1,x) = (x - c_1)^d g(x) \,, \quad \text{где} \quad g(c_1) \neq 0 \,,$$

то $f_\gamma(1, c_1 + x_1) = x_1^d g(c_1) +$ старшие степени x_1 . Поэтому после сокращения на t^γ уравнение на x_1 будет содержать с ненулевым коэффициентом моном $t^0 x^d$, а значит, его ломаная Ньютона выйдет на горизонтальную ось не правее точки $(d, 0)$, и длины горизонтальных проекций всех её рёбер будут не больше кратности выбранного корня c_1.

Упражнение 4.19. Докажите лем. 4.5 непосредственно следуя методу Ньютона. Для этого проверьте, что а) знаменатель дроби $\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}$ не превосходит длины ℓ горизонтальной проекции выбранного звена ломаной Ньютона б) если в ломаной Ньютона для уравнения на x_1 окажется ребро с той же длиной ℓ горизонтальной проекции, то $\varepsilon_1 \in \mathbb{N}$. Выведите из этих утверждений, что результатом вычисления по методу Ньютона является ряд Пюизо (4-34), являющийся корнем многочлена $F(t,x)$.

[1] т. е. общий показатель у t во всех сокращаемых мономах (4-36)

Итак, вычисление по методу Ньютона состоит в том, что для каждого из рёбер ломаной Ньютона многочлена $F(t,x)$ и каждого корня c_1 уравнения (4-37) мы подставляем $x = t^{\varepsilon_1}(c_1 + x_1)$ в многочлен F, делим результат на t^{γ}, и повторяем процедуру к полученному многочлену от x_1, находя следующие ε_2 и c_2 в разложении (4-34), и т. д.

Например, для многочлена (4-35) вектор нормали к левому звену ломаной Ньютона на рис. 4⋄1 равен $(1,1)$. Поэтому $\varepsilon_1 = 1$, а c_1 удовлетворяет уравнению $-1 - 2\,c_1 - c_1^2 = 0$, имеющему двукратный корень $c_1 = -1$. Подставляя $x = t\,(x_1 - 1)$ в (4-35) и деля на t^3, получаем[1] многочлен

$$-x_1^2 + t + t^2(-1+x_1)^4(1+x_1) = (t+t^2) - 3t^2\,x_1 + (-1+2t^2)\,x_1^2 + 2t^2\,x_1^3 - 3\,x^2\,x_1^4 + t^2\,x_1^5 \tag{4-39}$$

с многоугольником Ньютона, показанным на рис. 4⋄2. Его ломаная Ньютона состоит из единственного звена с вектором нормали $(1,2)$, что даёт $\varepsilon_2 = 1/2$ и уравнение $-1 - c_2^2 = 0$ с двумя корнями $c_2 = \pm 1$. Беря $c_2 = 1$ и подставляя $x_1 = x^{1/2}(1 + x_2)$ в 4-39, получаем многочлен вида

$$(t - 3t^{3/2} + \cdots) + (-2 - 3t^{3/2} + \cdots)\,x_2 + \\ + (-1 - 2t^3 + \cdots)\,x_2^2 + \cdots .$$

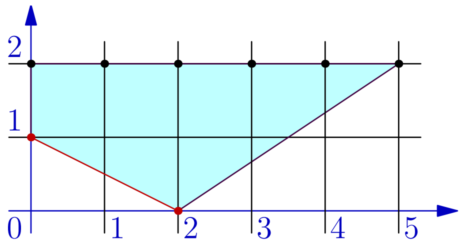

Рис. 4⋄2.

Его ломаная Ньютона состоит из единственного звена, соединяющего точки $(0,1)$ и $(1,0)$. По упр. 4.19, на всех последующих шагах ломаная Ньютона будет также состоять из единственного звена, соединяющего точки $(0,1)$ и $(1,0)$, так что получающееся на этом пути решение является степенным рядом от $t^{1/2}$. Теперь мы можем записать этот ряд с неопределёнными коэффициентами, подставить в F, и найти коэффициенты.

Вектор нормали к правому звену ломаной на рис. 4⋄1 равен $(1,3)$, что даёт $\varepsilon_1 = 1/3$ и уравнение $-1 + c_1^3 = 0$, имеющее корни $c_1 = 1,\ \omega,\ \omega^2$, где $\omega \in \Bbbk$ — первообразный кубический корень из единицы. Беря $c_2 = \omega$, подставляя $x = t^{1/3}(\omega + x_1)$ в (4-35) и сокращая на $t^{5/3}$, получаем многочлен

$$(-t^{4/3} + t^{7/3}) + (3\omega + 6t^{2/3})\,x_1 + (9 + 12\omega^2 t^{2/3})\,x_1^2 + (10\omega^2 + 8\omega t^{2/3})\,x_1^3 + (5\omega + 2t^{2/3})\,x_1^4 + x_1^5\,,$$

ломаная Ньютона которого опять-таки состоит из единственного звена, соединяющего точки $(0,1)$ и $(1,0)$, так что искомое решение является степенным рядом с натуральными показателями от $x^{1/3}$, и его можно вычислять методом неопределённых коэффициентов.

[1] в ходе этого вычисления удобно сгруппировать вместе мономы $x^p t^q$, лежащие на параллельных выбранному ребру прямых $p + q = \mathrm{const}$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.3. Равенство несократимых записей $p/q = r/s$ означает равенство $ps = qr$, в котором p взаимно просто с q, а s взаимно просто с r. Из лем. 2.3 следует, что в этом случае $p = rf$, а $q = sg$, откуда $frs = grs$ и $f = g$. Поскольку запись p/q предполагалась несократимой, $\deg f = 0$.

Упр. 4.5. Согласно правилу дифференцирования композиции $\left(f^m\right)' = m \cdot f^{m-1} \cdot f'$, имеем $\frac{d}{dx}(1-x)^{-m} = \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^m\right)' = m(1-x)^{-m-1}$, откуда нужная формула легко получается по индукции.

Упр. 4.7. Продифференцируйте обе части.

Упр. 4.9. Линейность отображений $f(D)$ следует из линейности отображения D и того, что суммы и композиции линейных отображений также являются линейными отображениями.

Упр. 4.11. Ответы: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{30}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{42}$, $a_7 = 0$, $a_8 = -\frac{1}{30}$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{5}{66}$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -\frac{691}{2730}$,

$$S_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$
$$S_5(n) = n^2(n+1)^2(2n+1)(2n^2+2n-1)/12$$
$$S_{10}(1000) = 91\,409\,924\,241\,424\,243\,424\,241\,924\,242\,500\,.$$

Упр. 4.13. $\nabla(x^n) = (-1)^n n x^{n-1} +$ младшие члены, $D = -\ln(1-\nabla) = -\sum\limits_{k\geqslant 1} \nabla^k/k$.

Упр. 4.14. Первое вытекает из рекурсивной формулы для биномиальных коэффициентов

$$\binom{x+k-1}{k-1} + \binom{x+k-1}{k} = \binom{x+k}{k}.$$

Если $f = \sum\limits_\nu c_\nu \gamma_\nu$, то $\nabla^k f(-1) = \sum\limits_\nu c_\nu \gamma_{\nu-k}(-1) = c_k$, поскольку $\gamma_m(-1) = 0$ при $m \neq 0$. Существование разложения устанавливается индукцией по $n = \deg f$: пусть $g = \sum\limits_{k=0}^{n} \nabla^k f(-1)\gamma_k$. Тогда $g(-1) = f(-1)$ и, т. к. $\deg \nabla f < n$, по индукции $\nabla f = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \nabla^{k+1} f(-1)\gamma_k = \nabla g$; тем самым f и g принимают равные значения во всех целых точках, а значит, $f = g$ в $\mathbb{Q}[x]$.

Упр. 4.15. Надо подобрать многочлены $p_i, q_i \in \Bbbk[x]$ ограниченной степени так, чтобы ряды

$$P(t,x) = p_0(x) + p_1(x)\,t + p_2(x)\,t^2 + \cdots \quad \text{и} \quad Q(t,x) = q_0(x) + q_1(x)\,t + q_2(x)\,t^2 + \cdots,$$

удовлетворяли равенству $AP + BQ = 1$. Приравняем у обеих частей коэффициенты при t^k:

$$a_0 p_0 + b_0 q_0 = 1 \qquad \text{(при } k = 0\text{)}$$
$$a_0 p_k + b_0 q_k = -\sum_{i=1}^{k-1}(a_i p_{k-i} + b_i q_{k-i}) \qquad \text{(при } k \geqslant 1\text{)}.$$

Так как a_0 и b_0 взаимно просты, и $\deg a_i < \deg a_0$, $\deg b_i < \deg b_0$ при всех $i > 0$, написанные соотношения однозначно определяют многочлены p_i и q_i степеней, строго меньших, чем $\deg a_0$ и $\deg b_0$ соответственно.

Упр. 4.16. Если m и $\vartheta(t)$ решают модифицированную задачу, то для первой модификации они же решают и исходную задачу, а для второй и третьей модификаций решение исходной задачи даётся тем же m и рядами $\vartheta(t)/a_n(t^q)$ и $\vartheta(t) + a_{n-1}(t^q)/n$ соответственно.

Упр. 4.17. Пусть многочлен $f(x) = a_0(t) + a_1(t)\,x + \cdots + a_n(t)\,x^n$ имеет коэффициенты $a_i(t)$ в поле рядов Пюизо. Обозначим общий знаменатель всех показателей всех рядов a_i через m и положим $t = u^m$. Тогда $a_i(t) = a_i(u^m) \in \Bbbk((u))$ и по лем. 4.5 после ещё одной подстановки $u = s^q$ у многочлена f появится корень в поле $\Bbbk((s))$. Возвращаясь к старому параметру $t = s^{qm}$ получаем корень многочлена f в виде ряда Пюизо от $t^{\frac{1}{qm}}$.

Упр. 4.19. Утверждение (а) очевидно. В (б) длины горизонтальных проекций всех рёбер ломаной Ньютона для уравнения на x_1 строго меньше длины ℓ горизонтальной проекции ребра, выбранного для отыскания ε_1, всегда, кроме случая, когда c_1 является ℓ-кратным корнем многочлена $f_\gamma(x,1)$. В этом случае $f_\gamma(x,1) = \alpha \cdot (x - c_1)^\ell$, где α — ненулевая константа. Поэтому выбранное ребро содержит все без исключения мономы x^ν с $0 \leqslant \nu \leqslant \ell$, а значит, вектор нормали к этому ребру имеет координаты $(d, 1)$ с $d \in \mathbb{N}$, откуда $\varepsilon_1 = d \in \mathbb{N}$.

Из (а), (б) и (в) вытекает, что всякий раз, когда ε_i не является целым, максимальная из длин горизонтальных проекций рёбер ломаной Ньютона для уравнения на x_i будут строго меньше, чем на предыдущем шаге. Поэтому в последовательности ε_i имеется лишь конечное число нецелых показателей, и у них есть общий знаменатель.