

§6. Векторы

6.1. Векторные пространства. Зафиксируем произвольное поле \mathbb{k} , которое мы будем далее называть *основным*, а его элементы — *числами*. Определение векторного пространства формализует свойства алгебраических операций над геометрическими векторами — сложение векторов и умножение векторов на числа. Эти свойства присущи объектам самой разной природы: от расширений полей и пространств функций до пространств решений линейных уравнений и пространств подмножеств. Тем не менее, векторы продуктивно представлять себе именно геометрически, как направленные отрезки («стрелочки»), рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

Определение 6.1

Аддитивная абелева группа V называется *векторным пространством* (а её элементы — *векторами*) над полем \mathbb{k} , если на ней задана операция *умножения векторов на числа*

$$\mathbb{k} \times V \rightarrow V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

которая обладает следующими свойствами:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall v \in V \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (6-1)$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall v \in V \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad (6-2)$$

$$\forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{k} \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad (6-3)$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall v \in V \quad 1 \cdot v = v. \quad (6-4)$$

Групповая операция в векторном пространстве V называется *сложением векторов*. Нейтральный элемент 0 группы V называется *нулевым вектором*, а векторы v и $-v$ — *противоположными* векторами. Подмножество $U \subset V$, являющееся векторным пространством относительно имеющих в V операций, называется *подпространством* в V .

Определение 6.2

Если в предыдущем [опр. 6.1](#) заменить поле \mathbb{k} а произвольное коммутативное кольцо K , то абелева группа V с умножением $K \times V \rightarrow V$, которое удовлетворяет свойствам (6-1)–(6-3), называется *модулем* над K (или *K -модулем*). Если K — кольцо с единицей, а умножение векторов на числа обладает также и последним свойством (6-4), K -модуль V называется *унитальным*. Таким образом, векторные пространства являются специальными примерами модулей.

Упражнение 6.1. Выведите из свойств (6-1)–(6-3), что в любом K -модуле V для всех $v \in V$ и $\lambda \in K$ выполняются равенства $0 \cdot v = 0$ и $\lambda \cdot 0 = 0$, и что в унитарном модуле над коммутативным кольцом с единицей результатом умножения произвольного вектора v на число $-1 \in K$ является противоположный к v вектор, т. е. $(-1) \cdot v = -v$.

Замечание 6.1. Иногда мы будем записывать произведение вектора $v \in V$ на число $\lambda \in K$ не как λv , а как $v\lambda$. Мы по определению считаем обе эти записи равнозначными.

Пример 6.1 (нулевое пространство)

Простейший пример векторного пространства — это *нулевое* (или *тривиальное*) пространство 0 , состоящее из одного нулевого вектора 0 , обратного самому себе и такого, что

$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot 0 = 0$. Точно так же над любым коммутативным кольцом K имеется нулевой K -модуль.

Пример 6.2 (основное поле)

Основное поле \mathbb{K} , в котором сложение векторов и умножение векторов на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле \mathbb{K} , также является векторным пространством над \mathbb{K} . Аналогично, любое коммутативное кольцо является модулем над собой.

Пример 6.3 (координатная плоскость)

Простейшее векторное пространство, отличное от нуля и основного поля — это *координатная плоскость* $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, векторами которой по определению являются столбцы чисел $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$. Сложение векторов и умножение векторов на числа определяются покомпонентно:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix}.$$

6.1.1. Линейные отображения. Отображение $F : U \rightarrow W$ из векторного пространства U в векторное пространство W называется *линейным отображением*¹, если оно перестановочно со сложением векторов и умножением векторов на числа, т. е.

$$\forall a, b \in U \quad \text{и} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b).$$

Мы уже сталкивались с линейными отображениями $\mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ в н° 4.6 на стр. 59, когда изучали разностные операторы на пространстве многочленов.

Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само отображение называется в этом случае *изоморфизмом* векторных пространств.

Будучи гомоморфизмом абелевых групп, всякое линейное отображение $F : V \rightarrow W$ обладает всеми свойствами, перечисленными нами в н° 2.6 на стр. 25. В частности, $F(0) = 0$ и $\forall v \quad F(-v) = -F(v)$. Образ $\text{im } F = F(V)$ — это подпространство в V , а ядро

$$\ker F = F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

является подпространством в V , и слой отображения F над каждым вектором $w \in \text{im } F$ представляет собой параллельный сдвиг ядра на произвольно выбранный вектор из этого слоя: если $F(v) = w$, то $F^{-1}(w) = v + \ker F$. В частности, линейное отображение инъективно тогда и только тогда, когда его ядро нулевое.

Предостережение 6.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, заданное формулой $\varphi(x) = a \cdot x + b$, которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле н° 6.1.1 только при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то

$$\varphi(\lambda x) \neq \lambda \varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y),$$

и φ не является линейным отображением.

¹а также *линейным оператором* или *гомоморфизмом векторных пространств*

6.1.2. Пропорциональность. Векторы a и b произвольного векторного пространства V называются *пропорциональными*¹, если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \mathbb{k}$, не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1}a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{k}$.

Пример 6.4 (определитель 2×2)

В координатном пространстве \mathbb{k}^2 из прим. 6.3 пропорциональность векторов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

равносильна равенству перекрёстных произведений: $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Величина

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1$$

называется *определителем* векторов a и b из \mathbb{k}^2 . Очевидно, что

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \quad (6-5)$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \quad \forall a, b \in \mathbb{k}^2 \quad (6-6)$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \quad \forall a, b \in \mathbb{k}^2 \text{ и } \forall \lambda \in \mathbb{k} \quad (6-7)$$

$$\begin{aligned} \det(a_1 + a_2, b) &= \det(a_1, b) + \det(a_2, b) \\ \det(a, b_1 + b_2) &= \det(a, b_1) + \det(a, b_2) \end{aligned} \quad \forall a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathbb{k}^2 \quad (6-8)$$

Свойство (6-6) называется *кососимметричностью*, свойство (6-7) — *однородностью*, свойство (6-8) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов и для любых векторов $a, b, c, d \in \mathbb{k}^2$ и чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$ имеет место *дистрибутивность*:

$$\det(\alpha a + \beta b, \gamma c + \delta d) = \alpha\gamma \det(a, c) + \alpha\delta \det(a, d) + \beta\gamma \det(b, c) + \beta\delta \det(b, d). \quad (6-9)$$

Важное геометрическое следствие этих формул заключается в том, что любая пара непропорциональных векторов $a, b \in \mathbb{k}^2$ образует *базис* пространства \mathbb{k}^2 в том смысле, что каждый вектор $v \in \mathbb{k}^2$ единственным образом представляется в виде

$$v = x \cdot a + y \cdot b \quad \text{с} \quad x, y \in \mathbb{k}, \quad (6-10)$$

причём коэффициенты x, y этого разложения можно вычислять по *правилу Крамера*

$$\begin{aligned} x &= \det(v, b) / \det(a, b) \\ y &= \det(a, v) / \det(a, b). \end{aligned} \quad (6-11)$$

В самом деле, т. к. $\det(a, a) = \det(b, b) = 0$, для любого разложения (6-10)

$$\begin{aligned} \det(a, v) &= \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b) \\ \det(v, b) &= \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b), \end{aligned}$$

¹а также *коллинеарными* или *линейно зависимыми*

что даёт для x и y выражения (6-11). С другой стороны, для любого $v \in \mathbb{K}^2$ равенство

$$v = \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a + \frac{\det(a, v)}{\det(a, b)} \cdot b$$

и в самом деле выполнено: разность $v - \det(v, b) \cdot a / \det(a, b)$ пропорциональна b , т. к.

$$\det \left(v - \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a, b \right) = \det(v, b) - \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot \det(a, b) = 0,$$

а это означает, что $v = \det(v, b) \cdot a / \det(a, b) + \lambda \cdot b$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}$, откуда по правилу Крамера $\lambda = \det(a, v) / \det(a, b)$.

6.2. Базисы и размерность. Рассмотрим произвольное векторное пространство V над полем \mathbb{K} . Скажем, что вектор v *линейно выражается* через векторы w_1, w_2, \dots, w_m , если

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$$

для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Семейство¹ векторов $\{w_v\}$ называется *порождающим* векторное пространство V , если каждый вектор $v \in V$ линейно выражается через какое-нибудь *конечное* множество векторов из этого семейства². Векторное пространство, в котором имеется конечный порождающий набор векторов, называется *конечномерным*.

Порождающий векторное пространство V набор векторов $\{e_v\}$ называется *базисом* этого пространства, если любой вектор $v \in V$ имеет *единственное* представление в виде конечной линейной комбинации базисных векторов. Коэффициенты x_i единственного линейного выражения $v = \sum x_i e_i$ вектора v через базисные векторы e_i называются *координатами* вектора v в базисе $\{e_v\}$.

Ниже, в сл. 6.1, мы покажем, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы состоят из одно и того же числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$ или $\dim_{\mathbb{K}} V$, если надо подчеркнуть, о каком основном поле \mathbb{K} идёт речь.

Пример 6.5 (координатное пространство \mathbb{K}^n)

Координатное пространство \mathbb{K}^n является непосредственным обобщением координатной плоскости \mathbb{K}^2 из прим. 6.3. По определению, векторами пространства \mathbb{K}^n являются упорядоченные наборы из n чисел³

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

Сложение векторов и умножение векторов на числа задаётся правилами

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

¹возможно, бесконечное

²это конечное множество может быть разным для разных $w \in V$

³для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но часто бывает удобно представлять векторы пространства \mathbb{K}^n в виде столбцов

Векторы e_1, e_2, \dots, e_n с единицей на i -том месте и нулями в остальных

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad (6-12)$$

образуют базис пространства \mathbb{k}^n , поскольку произвольный вектор

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$$

линейно выражается через них единственным способом:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (6-13)$$

Таким образом, $\dim \mathbb{k}^n = n$. Базис (6-12) называется *стандартным* базисом координатного пространства \mathbb{k}^n .

Пример 6.6 (пространство матриц)

Полезной разновидностью координатного пространства является *пространство $m \times n$ -матриц* $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$. Его векторы — это прямоугольные таблицы из m строк и n столбцов, заполненные числами из поля \mathbb{k} :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сложение векторов и умножение векторов на числа определяется поэлементно: если матрица $A = (a_{ij})$ имеет в i -той строке и j -том столбце элемент a_{ij} , а матрица $B = (b_{ij})$ — элемент b_{ij} , то их линейная комбинация $\lambda A + \mu B$ с коэффициентами $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, по определению, имеет в i -той строке и j -том столбце элемент $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$. Например, в пространстве $\text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{k})$ имеем равенство

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатное пространство \mathbb{k}^n можно воспринимать как пространство $\text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{k})$ (матрицы, состоящие из единственной строки) или как пространство $\text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{k})$ (матрицы, состоящие из единственного столбца).

Мы будем обозначать через E_{ij} матрицу, имеющую единицу в пересечении i -той строки и j -того столбца и нули во всех остальных клетках. Матрицы E_{ij} называются *стандартными базисными матрицами* (или *матричными единицами*) и образуют базис в пространстве матриц, поскольку произвольная матрица $A = (a_{ij})$ единственным образом линейно выражается через них: $A = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij}$. В частности, $\dim \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k}) = mn$.

Пример 6.7 (пространство функций)

Пусть X — произвольное множество. Множество \mathbb{k}^X всех функций $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ образует векторное пространство относительно поточечного сложения значений функций и умножения их на константы: $f_1 + f_2 : x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ и $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$. Если множество X конечно и состоит из n элементов: $X = \{1, 2, \dots, n\}$, пространство функций $X \rightarrow \mathbb{k}$ изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^n . В самом деле, отображение, сопоставляющее

функции f набор её значений $(f(1), f(2), \dots, f(n)) \in \mathbb{k}^n$ линейно и биективно. Обратное отображение переводит стандартный базисный вектор $e_i \in \mathbb{k}^n$ в δ -функцию $\delta_i : X \rightarrow \mathbb{k}$, действующую по правилу

$$\delta_i : k \mapsto \begin{cases} 1 & \text{при } k = i \\ 0 & \text{при } 0 \neq i. \end{cases}$$

Замечание 6.2. Координатный модуль K^n , модуль матриц $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ и модуль функций K^X можно рассматривать над любым коммутативным кольцом K и описанные выше базисы будут их базисами над K .

Пример 6.8 (пространство подмножеств)

Если в предыдущем примере взять в качестве \mathbb{k} двухэлементное поле \mathbb{F}_2 и сопоставить каждому подмножеству $Z \subset X$ его *характеристическую функцию* $\chi_Z : X \rightarrow \mathbb{F}_2$, принимающую значение 1 всюду на Z и значение 0 всюду на $X \setminus Z$, мы получим взаимно однозначное соответствие между пространством функций и множеством всех подмножеств в X . Эта биекция наделяет множество подмножеств структурой векторного пространства над полем \mathbb{F}_2 , изоморфного пространству функций $X \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Упражнение 6.2. Укажите а пространстве подмножеств какой-нибудь базис.

Пример 6.9 (многочлены и ряды)

Многочлены с коэффициентами в поле \mathbb{k} очевидным образом образуют векторное пространство над \mathbb{k} относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Счётный набор мономов $1, x, x^2, \dots$ является базисом этого пространства, поскольку по определению каждый многочлен является конечной линейной комбинацией таких мономов и равенство двух многочленов означает равенство их коэффициентов.

Многочлены степени не выше n образуют в $\mathbb{k}[x]$ векторное подпространство, которое мы будем обозначать $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$. Первые $n + 1$ мономов $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют в $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ базис.

Упражнение 6.3. Покажите, что любой набор многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{k}[x]$, в котором $\deg f_m = m$ и каждый $f_m = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ имеет ненулевой старший коэффициент a_0 , является базисом векторного пространства $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ многочленов степени не выше n .

В пространстве формальных степенных рядов $\mathbb{k}[[x]]$ счётный набор мономов $1, x, x^2, \dots$ базисом *не является*, поскольку ряд с бесконечным числом ненулевых коэффициентов не является *конечной* линейной комбинацией мономов.

Упражнение 6.4. Покажите, что в $\mathbb{k}[[x]]$ нет счётного базиса.

6.2.1. Линейная зависимость. Векторы v_1, v_2, \dots, v_m в произвольном векторном пространстве V называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \tag{6-14}$$

вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует конечная линейная комбинация (6-14), равная нулевому вектору и имеющая хоть один ненулевой коэффициент λ_i , то векторы v_1, v_2, \dots, v_m называются *линейно зависимыми*. Отметим, что любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим.

Наличие между векторами линейной зависимости позволяет линейно выразить любой из входящих в неё с ненулевым коэффициентом векторов через остальные. Например, при $\lambda_m \neq 0$

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}.$$

Наоборот, всякое линейное выражение вида $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$ можно воспринимать как линейную зависимость

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0.$$

Лемма 6.1

Набор векторов $\{e_v\}$, порождающий векторное пространство V , тогда и только тогда является базисом, когда он линейно независим.

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_i e_i$ допускает *другое* выражение $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i . Наоборот, если какой-нибудь вектор допускает два различных представления $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$, то переносим правую часть в середину, получаем линейную зависимость $\sum (x_i - y_i) e_i = 0$. \square

Замечание 6.3. Понятия линейной зависимости, линейной порождаемости и базиса дословно сохраняют свой смысл для любых модулей над произвольным коммутативным кольцом K и лем. 6.1 при этом остаётся справедливой.

Упражнение 6.5. Убедитесь в последнем.

Однако над кольцом, которое не является полем, наличие линейной зависимости между векторами обычно *не позволяет* линейно выразить один из векторов через остальные, поскольку для этого требуется деление. Например, в кольце $K = \mathbb{Q}[x, y]$, рассматриваемом как модуль над собой, векторы $u = x$ и $v = y$ линейно зависимы: $yu - xv = 0$, но ни один из них не выражается через другой. По этой причине следующая ниже лемма и её многочисленные следствия будут справедливы только для векторных пространств над полем.

Лемма 6.2 (лемма о замене)

Если векторы w_1, w_2, \dots, w_m порождают V , а векторы u_1, u_2, \dots, u_k линейно независимы, то $m \geq k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор $u_1, u_2, \dots, u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_m$ (получающихся заменой первых k векторов w_i векторами u_i) также будет порождать пространство V .

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$. Поскольку $u_1 \neq 0$ (иначе векторы u_i линейно зависимы), среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Тогда вектор w_1 линейно выражается через u_1 и w_2, \dots, w_m :

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m.$$

Следовательно, векторы $u_1, w_2, w_3, \dots, w_m$ порождают V .

Далее действуем по индукции. Пусть для очередного i в пределах $1 \leq i < k$ векторы $u_1, u_2, \dots, u_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_m$ порождают V . Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \dots + x_m w_m. \quad (6-15)$$

Поскольку векторы u_v линейно независимы, вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы u_1, u_2, \dots, u_i , и значит, в разложение (6-15) входит с ненулевым коэффициентом хотя бы один из оставшихся векторов w_j . Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы в $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, \dots, w_m$, и, значит, этот набор порождает V , что воспроизводит индуктивное предположение. \square

Упражнение 6.6. Покажите, что векторное пространство V тогда и только тогда бесконечномерно, когда в нём имеются линейно независимые наборы из сколь угодно большого числа векторов.

Следствие 6.1 (теорема о базисе)

В каждом векторном пространстве V любой порождающий набор векторов содержит в себе некоторый базис, а любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса. При этом все базисы равносильны.

Доказательство. Мы докажем теорему в предположении, что пространство V конечномерно. Доказательство для общего случая намечено в зам. 6.4. — оно совершенно аналогично, но привлекает некоторые факты из курса математической логики.

Пусть пространство V порождается векторами v_1, v_2, \dots, v_m . По очереди выкидывая из него те векторы, которые линейно выражаются через остальные, мы в конце концов получим линейно независимый порождающий набор векторов, который по лем. 6.1 является базисом.

Поскольку число векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, все базисы состоят из одинакового количества векторов.

Добавляя к произвольно взятому линейно независимому набору векторов вектор, который не выражается через него линейно, мы получаем линейно независимый набор векторов. В силу леммы о замене, повторив эту процедуру не более m раз, мы придём к линейно независимому набору, порождающему всё пространство, т. е. получим базис. \square

Следствие 6.2

В n -мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов является базисом.

Доказательство. Пусть векторы e_1, e_2, \dots, e_n составляют базис V , а векторы v_1, v_2, \dots, v_n линейно независимы. По лемме о замене (лем. 6.2) порождающие векторы e_i можно заменить векторами v_i так, что набор v_1, v_2, \dots, v_n останется порождающим. Тем самым, он — базис. Пусть теперь векторы w_1, w_2, \dots, w_n порождают V . Тогда этот набор векторов содержит в себе некоторый базис. По теореме о базисе в нём должно быть ровно n векторов, т. е. этот базис совпадает со всем набором w_1, w_2, \dots, w_n . \square

Следствие 6.3

Всякое n -мерное векторное пространство V над полем \mathbb{k} изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^n . Множество изоморфизмов между V и \mathbb{k}^n взаимно однозначно соответствует множеству базисов в V .

Доказательство. Если отображение $F : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V$ является изоморфизмом, то образы $v_i = F(e_i)$ стандартных базисных векторов $e_i \in \mathbb{K}^n$ из (6-12) образуют базис пространства V . Наоборот, для любого базиса v_1, v_2, \dots, v_n пространства V отображение $F : \mathbb{K}^n \rightarrow V$, заданное правилом $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$, линейно, биективно и переводит стандартный базис (6-12) пространства \mathbb{K}^n в базис v_i пространства V . \square

Пример 6.10 (конечные расширения полей)

Всякое поле \mathbb{F} является векторным пространством над любым своим подполем $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$. Расширение полей $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ называется *конечным*, если объемлющее поле \mathbb{F} конечномерно как векторное пространство над \mathbb{K} . Например, любое конечное поле \mathbb{F} характеристики $p = \text{char } \mathbb{F}$ является конечным расширением своего простого подполя $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}$. Поэтому, по сл. 6.3 $\mathbb{F} \simeq \mathbb{F}_p^n$ как векторное пространство над \mathbb{F}_p . В частности, \mathbb{F} состоит из p^n элементов, где $n = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$, что даёт простое геометрическое решение упр. 3.23.

Упражнение 6.7. Может ли поле из 9 элементов быть подполем поля из 27 элементов?

Замечание 6.4. Без предположения о том, что пространство V линейно порождается конечным набором векторов, сл. 6.1 доказывается следующим образом. Множество всех линейно независимых наборов векторов в V , частично упорядоченное отношением включения, является *полным* в том смысле, что для каждого линейно упорядоченного по включению множества линейно независимых наборов векторов существует линейно независимый набор векторов, содержащий в себе все наборы из рассматриваемого множества.

Упражнение 6.8. Убедитесь, что в качестве такого мажорирующего набора можно взять объединение всех наборов из рассматриваемого множества.

Поэтому, согласно *лемме Цорна*¹, любой линейно независимый набор векторов содержится в некотором *максимальном* линейно независимом наборе $\{e_v\}$ — таком, который сам уже не содержится ни в каком строго большем линейно независимом наборе. Этот максимальный линейно независимый набор $\{e_v\}$ является порождающим, т. к. при добавлении к нему любого вектора v будет получаться линейно зависимый набор, и в силу линейной независимости векторов e_v линейная зависимость между векторами v и e_i будет содержать вектор v с ненулевым коэффициентом, т. е. v будет линейно выражаться через e_i . Таким образом, любой линейно независимый набор векторов содержится в некотором базисе.

Если в проделанном рассуждении ограничиться рассмотрением линейно независимых наборов векторов, содержащихся в произвольно заданном множестве векторов $\mathcal{G} \subset V$, линейно порождающем пространство V , мы получим базис пространства V , являющийся подмножеством в \mathcal{G} .

Доказательство того, что любые два базиса равномощны, требует трансфинитного расширения лем. 6.2.

Упражнение 6.9. Пусть множество векторов $\mathcal{G} \subset V$ порождает V , а множество векторов $\mathcal{E} \subset V$ линейно независимо. Покажите, что в \mathcal{G} имеется равномощное \mathcal{E} подмноже-

¹напомним, что *лемма Цорна* утверждает, что всякое полное частично упорядоченное множество содержит хотя один максимальный элемент, см. *Ван Дер Варден*, «Алгебра» (М., «Мир», 1976, стр. 246–249) или *П. С. Александров*, «Введение в теорию множеств и общую топологию» (М., «Наука», 1977, стр. 80–83)

ство, такое что после замены векторов этого подмножества множеством векторов \mathcal{E} полученный набор векторов останется порождающим.

Из этого упражнения вытекает, любая линейно независимая система векторов равносильна некоторому подмножеству любой порождающей системы. Отсюда по теореме Кантора – Бернштейна¹ мы заключаем, что любые два базиса равносильны.

6.3. Линейные отображения $F : U \rightarrow W$ между двумя векторными пространствами U и W тоже образуют векторное пространство относительно операций поточечного сложения значений и умножения их на числа: $F + G : v \mapsto F(v) + G(v)$ и $\lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v)$. Пространство линейных отображений обозначается через $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$, или просто $\text{Hom}(U, W)$, если основное поле не существенно.

Предложение 6.1

Если V конечномерно, то для любого линейного отображения $F : V \rightarrow W$

$$\dim \ker F + \dim \text{im } F = \dim V. \quad (6-16)$$

Доказательство. Выберем в подпространстве $\ker F$ базис u_1, u_2, \dots, u_k и дополним его векторами e_1, e_2, \dots, e_m до базиса всего пространства V . Достаточно показать, что векторы $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_m)$ составляют базис в $\text{im } F$. Они порождают образ, т. к. для любого вектора $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j$ выполняется равенство $F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j)$. Они линейно независимы, поскольку равенство $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ означало бы, что вектор $\sum \lambda_i e_i$ лежит в $\ker F$, а значит, является линейной комбинацией векторов u_i , что возможно только когда все $\lambda_i = 0$. \square

Следствие 6.4

Следующие свойства линейного отображения $F : V \rightarrow V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу: (1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\text{im } F = V$.

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по предл. 6.1, а их одновременное выполнение равносильно (1). \square

6.3.1. Матричная запись. Если пространства U и W конечномерны, то выбирая в них базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W \quad (6-17)$$

и выражая образы $F(u_j)$ базисных векторов пространства U через базис пространства W в виде

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij} \in W \quad (6-18)$$

¹напомним, что теорема Кантора – Бернштейна утверждает, что если множество A инъективно отображается в множество B , а множество B инъективно отображается в множество A , то между множествами A и B существует биекция

констатирует тот факт, что вектор $b \in \mathbb{k}^m$, столбец координат которого стоит в правой части системы (6-22), является образом неизвестного вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$ под действием линейного оператора $A : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$, переводящего стандартные базисные векторы координатного пространства \mathbb{k}^n в столбцы матрицы (a_{ij}) , составленной коэффициентов левых частей уравнений (6-22). Таким образом, речь идёт об одном уравнении $A(x) = b$ на вектор x , качественное устройство решений которого мы уже много раз описывали: если $b \notin \text{im } A$, то множество решений пусто, а если $b \in \text{im } A$, множество решений является параллельным сдвигом подпространства $\ker A$ на произвольный вектор $v \in \mathbb{k}^n$, являющийся решением. Иначе говоря, разность любых двух решений x и x' является решением однородной системы линейных уравнений, получающейся из (6-22), если положить все $b_i = 0$. Из предл. 6.1 и сл. 6.4 вытекают

Следствие 6.5

Размерность пространства решений системы из m однородных¹ линейных уравнений от n переменных не меньше, чем $n - m$. В частности, любая система однородных линейных уравнений, в которой число переменных строго больше числа уравнений, всегда обладает ненулевым решением.

Следствие 6.6 (альтернатива Фредгольма)

Если в системе (6-22) число уравнений равно числу неизвестных, то либо она имеет единственное решение при любых значениях правых частей, либо система однородных уравнений, возникающих, когда все $b_i = 0$, обладает ненулевым решением.

6.4. Подпространства. Согласно теореме о базисе вытекает, что базис любого подпространства $U \subset V$ можно дополнить до базиса во всём пространстве, откуда, в частности, следует, что любое подпространство U в конечномерном пространстве V тоже конечномерно, и $\dim U \leq \dim V$.

Для подпространства U в конечномерном пространстве V разность размерностей

$$\text{codim}_V U \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$$

называется *коразмерностью* подпространства U в V . Например, по предл. 6.1 размерность образа линейного отображения равна коразмерности его ядра.

Пример 6.12 (гиперплоскости)

Векторные подпространства коразмерности 1 в V называются *гиперплоскостями*. Если $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ — ненулевое линейное отображение, то оно сюръективно, и по предл. 6.1 его ядро $\ker \xi \subset V$ является гиперплоскостью в V . Например, многочлены степени не выше n , имеющие заданный корень $a \in \mathbb{k}$, образуют гиперплоскость в пространстве $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ всех многочленов степени не выше n . Эта гиперплоскость является ядром ненулевого линейного отображения $\text{ev}_a : f \mapsto f(a)$, сопоставляющего многочлену его значение в точке a .

Упражнение 6.12*. Покажите, что всякая гиперплоскость $W \subset V$ представляется в виде $W = \ker \xi$ для некоторого ненулевого линейного отображения $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$, причём ξ определяется по W однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу.

¹т. е. с нулевыми правыми частями

6.4.1. Линейные оболочки. Пересечение любого семейства подпространств произвольного векторного пространства V является подпространством в V . Пересечение всех подпространств, содержащих заданное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается

$$\text{span}(M) = \bigcap_{U \supset M} U. \quad (6-23)$$

Это наименьшее по включению векторное подпространство в V , содержащее M . Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M . В самом деле, такие линейные комбинации составляют векторное подпространство в V , которое содержится в любом подпространстве, содержащем M .

Упражнение 6.13*. Покажите, что линейная оболочка любого множества векторов $M \subset V$ совпадает с пересечением всех содержащих M гиперплоскостей в V .

6.4.2. Сумма подпространств. Объединение подпространств, как правило, подпространством не является. Например многочлены вида ax^2 и многочлены вида bx образуют два одномерных подпространства в пространстве многочленов, но сумма $x^2 + x$ не лежит в их объединении.

Упражнение 6.14. Покажите, что объединение двух подпространств является подпространством только когда одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения $\bigcup_{\nu} U_{\nu}$ заданного набора подпространств $U_{\nu} \subset V$ называется *суммой* подпространств U_{ν} и обозначается $\sum U_{\nu}$. Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \\ U_1 + U_2 + U_3 &= \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Предложение 6.3

Если подпространства U_1, U_2 произвольного векторного пространства V конечномерны, то $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис u_1, u_2, \dots, u_k в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами v_1, v_2, \dots, v_r и w_1, w_2, \dots, w_s до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_s$ образуют базис пространства $U_1 + U_2$. Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ и $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы v_i , так и векторы w_j . Переносим $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_r$ в одну часть, а w_1, w_2, \dots, w_s — в другую, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2 , означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. \square

Следствие 6.7

Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V выполняется неравенство $\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V)$. В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из предл. 6.3 и неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V$. \square

Следствие 6.8

Следующие три условия на подпространства $U_1, U_2 \subset V$ равносильны друг другу:

- 1) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ 2) $U_1 \cap U_2 = 0$
- 3) любой вектор $w \in U_1 + U_2$ имеет *единственное* представление в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$

Доказательство. По сл. 6.7 (1) \Leftrightarrow (2). Покажем, что (2) \Leftrightarrow (3). Если $U_1 \cap U_2 \ni u \neq 0$, то нулевой вектор $0 \in U_1 + U_2$ имеет как минимум два разложения в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$: можно взять $u_1 = u_2 = 0$, а можно взять $u_1 = u, u_2 = -u$. Если же $U_1 \cap U_2 = 0$, то из равенства $u'_1 + u'_2 = u''_1 + u''_2$, в котором $u'_1, u''_1 \in U_1$ и $u'_2, u''_2 \in U_2$, следует равенство $u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2$, левая часть которого лежит в U_1 , а правая — в U_2 . Поэтому вектор $u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2$ лежит в $U_1 \cap U_2 = 0$ и, стало быть, равен нулю, т. е. $u'_1 = u''_1$ и $u'_2 = u''_2$. \square

6.4.3. Трансверсальные подпространства. Подпространства $U_1, U_2 \subset V$, удовлетворяющие условиям из сл. 6.8, называются *трансверсальными*. Сумма трансверсальных подпространств называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2$. Трансверсальные подпространства называются *дополнительными*, если $U_1 \oplus U_2 = V$. По сл. 6.8 для этого необходимо и достаточно, чтобы $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

Упражнение 6.15. Пусть $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ — линейное отображение, и $v \in V$ таков, что $\xi(v) \neq 0$. Покажите, что порождённое вектором v одномерное подпространство $\mathbb{k} \cdot v \subset V$ трансверсально к гиперплоскости $\ker \xi$ и $V = \mathbb{k} \cdot v \oplus \ker \xi$.

Более общим образом, сумма подпространств $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$, если каждый вектор $w \in U_1 + U_2 + \dots + U_n$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ с $u_i \in U_i$. Иначе можно сказать, что сумма подпространств $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$ прямая тогда и только тогда, когда любой набор ненулевых векторов u_1, u_2, \dots, u_m , где $u_i \in U_i$, линейно независим.

Например, если векторы $\{e_i\}$ образуют базис пространства V , то V является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых векторами e_i .

Упражнение 6.16. Покажите, что для того, чтобы сумма подпространств U_i была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое из подпространств U_i было трансверсально сумме остальных подпространств.

6.4.4. Прямые суммы и прямые произведения. Для любого семейства векторных пространств V_ν , где индекс ν пробегает произвольное фиксированное множество X , прямое произведение абелевых групп¹ $\prod_{\nu \in X} V_\nu$, элементами которого являются семейства векторов (v_ν) , в которых $v_\nu \in V_\nu$, имеет естественную структуру векторного пространства с

¹см. н° 2.5 на стр. 24

покомпонентными операциями $\lambda \cdot (v_v) + \mu \cdot (w_v) = (\lambda v_v + \mu w_v)$. Оно называется *прямым произведением* пространств V_v .

Подпространство прямого произведения, состоящее из семейств (v_v) , содержащих лишь конечное число ненулевых векторов, называется *прямой суммой* векторных пространств V_v и обозначается $\bigoplus_v V_v$.

Если набор пространств V_1, V_2, \dots, V_n конечен, то прямая сумма совпадает с прямым произведением: $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$.

Упражнение 6.17. Пусть векторное пространство V является прямой суммой своих подпространств $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$ в смысле н° 6.4.3. Покажите, что V изоморфно прямой сумме пространств U_i , рассматриваемых как абстрактные векторные пространства.

Если набор подпространств бесконечен, прямое произведение строго мощнее прямой суммы и линейно ею не порождается. Например, прямая сумма счётного семейства одномерных пространств изоморфна пространству многочленов $\mathbb{k}[x]$, а прямое произведение счётного семейства одномерных пространств изоморфно пространству степенных рядов $\mathbb{k}[[x]]$ (ср. с прим. 6.9 на стр. 88).

6.5. Аффинные пространства. Множество A называется *аффинным¹ пространством* над заданным векторным пространством V , если каждому вектору $v \in V$ сопоставлено преобразование сдвига (или *параллельный перенос*) $\tau_v : A \rightarrow A$ так, что выполняются следующие три свойства:

$$1) \tau_0 = \text{Id}_A, \quad 2) \forall v, w \in V \quad \tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w} \quad (6-24)$$

$$3) \forall p, q \in A \exists \text{ единственный } v \in V : \tau_v(p) = q \quad (6-25)$$

Размерностью аффинного пространства A называется размерность $\dim V$ векторного пространства V .

Первые два условия (6-24) означают, что параллельные переносы на всевозможные векторы $v \in V$ образуют абелеву группу преобразований пространства A . Отметим, что обратным к преобразованию сдвига τ_v на вектор v является сдвиг τ_{-v} на противоположный вектор $-v$.

Третье условие (6-25) означает, что любую точку q можно получить из любой точки p единственным преобразованием сдвига τ_v . Задающий этот сдвиг вектор v обозначается через \overrightarrow{pq} . Продуктивно представлять его себе как стрелку с началом в точке $p \in A$ и концом в точке $q \in A$. Из (6-24) вытекает, что

$$\overrightarrow{pp} = 0 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr} \quad \forall p, q, r \in A.$$

Упражнение 6.18. Убедитесь, что $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$ и что $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$.

Параллельный перенос τ_v можно воспринимать как операцию «откладывания» фиксированного вектора $v \in V$ от всевозможных точек $p \in A$, и мы часто будем писать $p + v$ вместо $\tau_v(p)$.

Пример 6.13

Множество всех многочленов степени m со старшим коэффициентом 1 представляет собою аффинное пространство над векторным пространством $\mathbb{k}[x]_{\leq(m-1)}$ всех многочленов

¹это слово является бесхитростной калькой с английского *affine* (ассоциированный)

степени не выше $m - 1$.

Упражнение 6.19. Докажите это.

Отметим, что размерность этого аффинного пространства равна m .

6.5.1. Аффинизация и векторизация. Из всякого векторного пространства V можно изготовить аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$, точками которого являются «концы» *радиус векторов* $v \in V$, отложенных от нуля. Оно называется *аффинизацией* векторного пространства V . Формально, точками пространства $\mathbb{A}(V)$, по определению, являются векторы пространства V , а параллельный перенос $\tau_w : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ переводит v в $v + w$.

Упражнение 6.20. Убедитесь, что свойства (6-24) и (6-25) выполняются.

Наоборот, если в произвольном аффинном пространстве A над V зафиксировать какую-нибудь «начальную» точку p и сопоставить каждой точке $q \in A$ вектор $\overline{pq} \in V$, мы, согласно (6-25), получим биекцию между точками из A и векторами из V . Эта биекция называется *векторизацией* аффинного пространства A с *началом* (или с *центром*) в точке $p \in A$. Набор p, e_1, e_2, \dots, e_n , где $p \in A$, а e_1, e_2, \dots, e_n — какой-нибудь базис в V , называется *аффинной системой координат* (или *репером*) в пространстве A . Коэффициенты разложения вектора \overline{pq} по базису e_1, e_2, \dots, e_n называются *аффинными координатами* точки q относительно репера p, e_1, e_2, \dots, e_n .

6.5.2. Аффинные подпространства. Пусть A является аффинным точечным пространством над векторным пространством V . Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек

$$P(p, U) = p + U = \{\tau_u(p) \mid u \in U\}$$

называется *аффинным подпространством*. Векторное подпространство U называется в этом случае *направляющим подпространством* аффинного пространства $P(p, U)$, а его размерность $\dim U$ называется *размерностью* аффинного пространства $P(p, U)$.

Пример 6.14 (прямые и плоскости)

Аффинные подпространства $p + U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида $p + vt$, где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает \mathbb{k} . Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида $p + \lambda u + \mu w$, где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегает \mathbb{k} .

Предложение 6.4

Следующие условия на аффинные подпространства $P(p, U)$ и $P(q, U)$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ равносильны друг другу:

$$\begin{array}{llll} 1) \overline{pq} \in U & 2) P(p, U) = P(q, U) & & \\ 3) P(p, U) \cap P(q, U) \neq \emptyset & 4) p \in P(q, U) & 5) q \in P(p, U). & \end{array}$$

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Если $\overline{pq} \in U$, то любая точка вида $q + u$ с $u \in U$ может быть записана в виде $p + w$ с $w = \overline{pq} + u \in U$, и обратно, любая точка вида $p + w$ с $w \in U$ может быть записана в виде $p + u$ с $u = w - \overline{pq} \in U$. Тем самым, $P(p, U) = P(q, U)$.

Если выполнено (2), то тем более выполнены (3), (4), (5), а выполнение условий (4) или (5) автоматически означает выполнение условия (3). Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить, что из (3) вытекает (1).

Пусть точка $r = p + u' = q + u'' \in \Pi(p, U) \cap \Pi(q, U)$, где $u' = \vec{p}\vec{r}$ и $u'' = \vec{q}\vec{r}$ лежат в U . Тогда и $\vec{p}\vec{q} = \vec{p}\vec{r} + \vec{r}\vec{q} = u' - u'' \in U$. \square

Предложение 6.5

Следующие условия на $k + 1$ точек p_0, p_1, \dots, p_k любого аффинного пространства A над произвольным векторным пространством V равносильны друг другу:

- 1) точки p_0, p_1, \dots, p_k не содержатся ни в каком $(k - 1)$ -мерном аффинном подпространстве
- 2) векторы $\vec{p_0p_1}, \vec{p_0p_2}, \dots, \vec{p_0p_k}$ линейно независимы
- 3) через p_0, p_1, \dots, p_k проходит единственное k -мерное аффинное подпространство

Доказательство. Покажем, что (1) равносильно (2). Линейная зависимость k векторов из (2) равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k - 1$, что в свою очередь означает, что в V найдётся $(k - 1)$ -мерное векторное подпространство U , содержащее все векторы $\vec{p_0p_i}$. По [предл. 6.4](#) последнее означает, что $(k - 1)$ -мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i .

Покажем, что (2) равносильно (3). По [предл. 6.4](#) прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i означает, что все векторы $\vec{p_0p_i}$ содержатся в U . А линейная независимость этих векторов означает, что они составляют базис в любом содержащем их k -мерном подпространстве $U \subset V$, а значит, любое такое подпространство представляет собою их линейную оболочку. \square

Предложение 6.6

Если векторное подпространство $U \subset V$ является множеством решений системы однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает некоторое подмножество $M \subset V^*$, то аффинное подпространство $\Pi(p, U) = p + U \subset A(V)$ является множеством решений системы неоднородных линейных уравнений вида $\xi(x) = \xi(p)$, где ξ пробегает то же самое подмножество $M \subset V^*$. Наоборот, всякая система неоднородных линейных уравнений на переменную точку $x \in A(V)$ вида $\xi(x) = c_\xi$, где ξ пробегает какое-нибудь подмножество $M \subset V^*$, а $c_\xi \in \mathbb{k}$ — некоторые константы, либо несовместна, либо множество её решений представляет собою аффинное подпространство вида $p + U$, где $U = \text{Ann } M \subset V$, а p — любое фиксированное решение системы (т. е. такая точка p , что $\xi(p) = c_\xi$ для всех $\xi \in M$).

Доказательство. В силу линейности функций $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ уравнения $\xi(x) = \xi(p)$ и $\xi(\vec{p}\vec{x}) = 0$ равносильны друг другу. \square

6.6. Фактор пространства. Со всяким подпространством $U \subset V$ связано разбиение пространства V на *смежные классы* подпространства U

$$[v]_U = v \pmod{U} = v + U = \{w \in V \mid w - v \in U\}$$

которые представляют собой классы эквивалентности по отношению $v \sim_U w$, означающему, что $w - v \in U$. Сложение классов и их умножение на числа определяются обычными формулами $[v] + [w] = [v + w]$ и $\lambda[v] = [\lambda v]$.

Упражнение 6.21. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем \mathbb{k} .

Пространство смежных классов подпространства U обозначается V/U и называется *фактор пространством* пространства V по подпространству U . Отображение факторизации $V \rightarrow V/U$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в его класс $[v]$, линейно и сюръективно.

Иначе смежный класс $[v]$ вектора $v \in V$ по подпространству $U \subset V$ можно воспринимать как проходящее через точку $v \in \mathbb{A}(V)$ параллельно подпространству $U \subset V$ аффинное подпространство в аффинизации $\mathbb{A}(V)$ пространства V : $[v] = v + U = \Pi(v, U) \subset \mathbb{A}(V)$. Таким образом, векторы фактор пространства V/U биективно соответствуют аффинным подпространствам в $\mathbb{A}(V)$ с заданным направляющим подпространством $U \subset V$.

Пример 6.15 (фактор по ядру)

Каждый линейный оператор $F : V \rightarrow W$ задаёт канонический изоморфизм

$$V/\ker F \simeq \operatorname{im} F,$$

сопоставляющий классу $[v] \in V/\ker F$ вектор $F(v) \in \operatorname{im} F$. Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F.$$

Следствие 6.9

Если векторы v_1, v_2, \dots, v_k дополняют некоторый базис u_1, u_2, \dots, u_m подпространства U до базиса во всём пространстве $V \supset U$, то их классы $[v_1], [v_2], \dots, [v_k]$ образуют базис фактор пространства V/U . В частности, $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Доказательство. Это частный случай [предл. 6.1](#) на стр. 92 (и её доказательства), относящийся к отображению факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$. \square

Пример 6.16 (линейная оболочка как фактор)

Линейная оболочка $W = \operatorname{span}(w_1, w_2, \dots, w_n) \subset V$ любого набора из n векторов w_i произвольного пространства V является образом линейного оператора $F : \mathbb{k}^n \rightarrow V$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \mathbb{k}^n$ в вектор $w_i \in W$. Ядро этого оператора $U = \ker F \subset \mathbb{k}^n$ представляет собою *пространство линейных соотношений* между векторами w_i в W в том смысле, что вектор $u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in \mathbb{k}^n$ лежит в U тогда и только тогда, когда $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$ в W . Изоморфизм $W = \operatorname{im} F \simeq \mathbb{k}^n/U$ из предыдущего [прим. 6.15](#) означает в этом случае, что векторы $w \in W$ суть классы вычетов линейных комбинаций $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$ по модулю тех комбинаций, которые являются линейными зависимостями между векторами w_i .

Предложение 6.7

Для любого r -мерного подпространства $U \subset \mathbb{k}^n$ существует такое разбиение стандартного базиса e_1, e_2, \dots, e_n координатного пространства \mathbb{k}^n на два непересекающихся подмножества

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\} \sqcup \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}\}, \quad (6-26)$$

что натянутые на них дополнительные друг другу координатные подпространства

$$E_I = \text{span}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}) \simeq \mathbb{k}^r \quad \text{и} \quad E_J = \text{span}(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}) \simeq \mathbb{k}^{n-r},$$

удовлетворяют условиям:

- 1) $U \cap E_J = 0$
- 2) факторизация $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n/U$ изоморфно отображает E_J на \mathbb{k}^n/U
- 3) проекция $c_I : \mathbb{k}^n \rightarrow E_I$ вдоль E_J изоморфно отображает U на E_I
- 4) в U найдётся r векторов u_1, u_2, \dots, u_r вида $u_v = e_{i_v} + w_v$, где $w_v \in E_J$.

Выполнение любого из этих условий влечёт за собою выполнение всех остальных, причём для заданных подпространства U и разбиения базиса в \mathbb{k}^n , удовлетворяющего условиям (1)–(4), набор векторов u_i , о котором идёт речь в (4), единственен и является базисом в U .

Доказательство. Существование разбиения вытекает из леммы о замене¹: для любого базиса w_1, w_2, \dots, w_r в пространстве U в стандартном базисе пространства \mathbb{k}^n некоторые r векторов можно заменить на векторы w_i так, что оставшиеся векторы $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}$ вместе с w_1, w_2, \dots, w_r составят базис в \mathbb{k}^n . Это означает, что линейная оболочка E_J векторов $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}$ удовлетворяет условию (1).

Покажем, что условия (1)–(4) эквивалентны друг другу. Из (1) следует, что пространство U имеет нулевое пересечение с ядром проекции $c_I : \mathbb{k}^n \rightarrow E_I$, а пространство E_J — с ядром факторизации $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n/U$. Поэтому ограничение этой факторизации на подпространство E_J и ограничение проекции вдоль E_J на подпространство U инъективны. Из соображений размерности оба этих ограничения — изоморфизмы. Наоборот, каждое из условий (2), (3) влечёт трансверсальность соответствующего пространства ядру рассматриваемого отображения, т. е. условие (1). Условие (4) говорит, что $c_I(u_v) = e_{i_v}$. Если это так, то c_I изоморфизм. Наоборот, если c_I изоморфизм, то векторы $u_v \in U$, проектирующиеся в базисные векторы e_{i_v} пространства E_I существуют, единственны и образуют базис в U . \square

Замечание 6.5. Для заданного подпространства $U \subset \mathbb{k}^n$ разбиение пространства \mathbb{k}^n в прямую сумму дополнительных координатных подпространств E_I и E_J , такое что U изоморфно проектируется на E_I вдоль E_J как правило не единственно: над бесконечным полем \mathbb{k} случайно взятое подпространство $U \subset \mathbb{k}^n$ почти наверняка изоморфно проектируется на каждое из $\binom{n}{r}$ r -мерных координатных подпространств E_I , так что условия предл. 6.7 оказываются выполненными для любого разбиения.

6.6.1. Фактор группы абелевых групп. Конструкция фактора векторного пространства по его подпространству, как и конструкция фактор кольца по идеалу из [опр. 5.2](#) на [стр. 72](#) являются надстройками над конструкцией фактора абелевой группы A по её подгруппе $B \subset A$. А именно, назовём элементы $a_1, a_2 \in A$ сравнимыми по модулю подгруппы B , если $a_1 - a_2 \in B$, и будем записывать это одним из наших обычных способов:

$$[a_1]_B = [a_2]_B \quad \text{или} \quad a_1 \sim_B a_2 \quad \text{или} \quad a_1 \equiv a_2 \pmod{B}.$$

¹см. [лем. 6.2](#) на [стр. 89](#)

Тогда правило $[a_1]_B + [a_2]_B \stackrel{\text{def}}{=} [a_1 + a_2]_B$ корректно задаёт на множестве классов A / B структуру абелевой группы.

Упражнение 6.22. Проверьте, что \sim_B является отношением эквивалентности и что предыдущая формула корректна, а все аксиомы абелевой группы для A / B выполнены.

Факторы векторных пространств и факторы колец являются частными случаями этой конструкции. В обоих случаях оказывается, что имеющаяся на абелевой группе дополнительная структура (соответственно, умножение на скаляры и кольцевое умножение) корректно переносится на фактор, при условии, что абелева подгруппа, по которой производится факторизация, является для дополнительной структуры «идеалом» в том смысле, что выдерживает умножение на все скаляры и, соответственно, кольцевое умножение на все элементы объемлющей группы.

Упражнение 6.23. Докажите, что подгруппа абелевой группы тогда и только тогда содержится в объединении конечного набора подгрупп, когда она целиком содержится в одной из них.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 6.1. Пусть $0 \cdot v = w$. Тогда $w + v = 0 \cdot v + 1 \cdot v = (0 + 1) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Прибавляя к обеим частям этого равенства $-v$, получаем $w = 0$. Из равенства $0 \cdot v = 0$ вытекает, что $\lambda \cdot 0 = \lambda(0 \cdot v) = (\lambda \cdot 0) \cdot v = 0 \cdot v = 0$. Наконец, равенство $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = ((-1) + 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$ означает, что $(-1) \cdot v = -v$.
- Упр. 6.3. По индукции проверяется, что каждый моном x^m (где $m = 0, 1, \dots, n$) линейно выражается через многочлены f_0, f_1, \dots, f_m , а значит, и любой многочлен степени $\leq m$ линейно выражается через f_0, f_1, \dots, f_m . Для доказательства единственности такого выражения заметим, что в равенстве $\sum \lambda_i f_i = \sum \mu_i f_i$ старший моном x^n появляется в обеих частях только из многочлена f_n . Поэтому сравнение коэффициента при x^n в обеих частях приводит к равенству $\lambda_n = \mu_n$. Вычитая из обеих частей $\lambda_n f_n = \mu_n f_n$, получаем равенство между многочленами меньшей степени, к которому применимо то же рассуждение.
- Упр. 6.4. Пространство со счётным базисом равномощно множеству конечных слов, составленных из элементов основного поля, а пространство рядов равномощно множеству бесконечных последовательностей элементов основного поля, которое строго более мощно, чем множество конечных слов.
- Упр. 6.7. Ответ: нет из соображений размерности.
- Упр. 6.8. Пусть какая-то конечная линейная комбинация векторов из объединения всех наборов обратилась в нуль. Каждый вектор из этой комбинации лежит в одном из наборов цепочки, а значит, и все они лежат в одном из наборов цепочки (том, что содержит остальные — такой существует, поскольку про любые два набора цепочки известно, что один из них является подмножеством другого). Так как каждый набор из цепочки предполагался линейно независимым, все коэффициенты этой линейной комбинации нулевые.
- Упр. 6.9. Рассмотрим множество всех пар (G, E) , таких что $G \subset \mathcal{G}$, $E \subset \mathcal{E}$, G равномощно E , и после замены в \mathcal{G} векторов из G на векторы из E набор остаётся порождающим. Первый шаг доказательства [лем. 6.2](#) показывает, что это множество пар непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $(G, E) \leq (G', E')$, если $G \subset G'$ и $E \subset E'$. Поскольку любая линейно упорядоченная цепочка пар мажорируется парой, у которой G - и E -множества являются объединениями всех G - и E -множеств рассматриваемой цепочки, по лемме Цорна найдётся пара (G, E) , не содержащаяся строго ни в какой большей паре. Если при этом $E \neq \mathcal{E}$, то же рассуждение, что и в доказательстве [лем. 6.2](#) позволит добавить к множествам G и E ещё по одному элементу, что противоречит максимальности пары (G, E) .
- Упр. 6.12. Это частный случай [предл. 7.2](#) на стр. 106.
- Упр. 6.13. Это следует из [теор. 7.1](#) на стр. 107.
- Упр. 6.14. Пусть $W \not\subset U$ два подпространства в V . Выберем вектор $w \in W \setminus U$. Если $W \cup U$ — подпространство, то $\forall u \in U \ w + u \in W \cup U$. Поскольку $w + u \notin U$ (т. к. $w \notin U$), $w + u \in W$, откуда $u \in W$, т. е. $U \subset W$.
- Упр. 6.15. Каждый вектор $w \in V$ представляется в виде $w = \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v + u$, где $u = w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v$ лежит в $\ker \xi$, поскольку $\xi\left(w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v\right) = \xi(w) - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot \xi(v) = 0$.
- Упр. 6.16. Индукция по числу подпространств с использованием разобранного перед этим случая двух подпространств.

Упр. 6.17. Поскольку каждый вектор $v \in V$ имеет единственное представление в виде $v = \sum u_i$ с $u_i \in U_i$, гомоморфизм сложения $\oplus U_i \rightarrow V$, $(u_1, u_2, \dots, u_m) \mapsto \sum u_i$, биективен.

Упр. 6.21. Все проверки проводятся дословно также, как для классов вычетов по модулю идеала (ср. с упр. 5.7).

Упр. 6.23. Пусть $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$. Переход к фактору по A_m и индукция по m сводят задачу к случаю $m = 2$. Если $B \subset A_1 \cup A_2$ и $b_1 \in (B \cap A_1) \setminus A_2$, $b_2 \in (B \cap A_2) \setminus A_1$, то $b_1 + b_2 \in B \supset A_1 \cup A_2$ не может лежать ни в A_1 , ни в A_2 , поскольку $b_1 + b_2 \in A_1 \Rightarrow b_2 \in A_1$, а $b_1 + b_2 \in A_2 \Rightarrow b_1 \in A_2$ вопреки выбору b_1 и b_2 .