§7. Двойственность

7.1. Двойственное пространство. Линейное отображение $\xi : V \to \Bbbk$ из векторного пространства над полем $\Bbbk$ в само это поле[1] называется *ковектором*[1] на пространстве V. Ковекторы образуют векторное пространство, которое обозначается $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ и называется *двойственным* (или *сопряжённым*) к V пространством.

Пример 7.1 (функционалы вычисления)
Пусть X — произвольное множество, и $V = \Bbbk^X$ — пространство всех функций на X со значениями в поле $\Bbbk$, как в прим. 6.7 на стр. 87. С каждой точкой $p \in X$ связан *функционал вычисления* $\mathrm{ev}_p : V \to \Bbbk$, переводящий функцию $f : X \to \Bbbk$ в её значение $f(p) \in \Bbbk$.

Упражнение 7.1. Убедитесь, что отображение ev_p линейно, и покажите, что для конечного множества X функционалы вычисления ev_p, где p пробегает X, составляют базис пространства, двойственного к пространству функций на X.

Пример 7.2 (координатные функционалы)
Каждому базису $\{e_i\}$ пространства V отвечает набор *координатных функционалов* $e_i^* \in V^*$. Функционал e_i^* сопоставляет вектору $v = \sum x_i e_i \in V$ значение i-той координаты этого вектора: $e_i^* : x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \mapsto x_i$. В частности, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases} \tag{7-1}$$

Упражнение 7.2. Убедитесь, что все отображения $e_i^* : V \to \Bbbk$ линейны.

Предложение 7.1
Координатные функционалы любого базиса пространства V линейно независимы в V^*. Если пространство V конечномерно, то они составляют базис пространства V^*. В частности, $\dim V = \dim V^*$.

Доказательство. Пусть в V^* имеется конечная линейная комбинация

$$\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \cdots + \lambda_N e_N^* = 0\,.$$

Вычисляя обе части на базисном векторе e_i, получаем, что $\lambda_i = 0$ для всех i. Второе утверждение вытекает из того, что каждый функционал φ на пространстве V с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно выражается через функционалы e_i^* по формуле

$$\varphi = \varphi(e_1)\, e_1^* + \varphi(e_2)\, e_2^* + \cdots + \varphi(e_n)\, e_n^*\,,$$

поскольку обе части этого равенства принимают одинаковое значение $\varphi(e_i)$ на каждом базисном векторе $e_i \in V$. □

Определение 7.1
Базисы $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in V$ и $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*) \in V^*$ называются *двойственными* базисами конечномерных пространств V и V^*.

[1]рассматриваемое как одномерное векторное пространство над собой
[1]а также *линейной формой* или *линейным функционалом*

7.1.1. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{**}$. Конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу абсолютно симметричные роли. А именно, каждый вектор $v \in V$ может рассматриваться как *функционал вычисления* на пространстве V^*, переводящий линейные формы в их значения на векторе v:

$$\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk, \quad \varphi \mapsto \varphi(v).$$

Поскольку число $\varphi(v) \in \Bbbk$ линейно зависит как от v, так и от φ, сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт *каноническое*[1] линейное отображение

$$\mathrm{ev} : V \to V^{**}, \quad v \mapsto \mathrm{ev}_v, \tag{7-2}$$

Упражнение 7.3. Убедитесь, что отображение (7-2) переводит любой базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V в базис пространства V^{**}, двойственный к базису $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ пространства V^*.

Упражнение показывает, что отображение (7-2) является *изоморфизмом*. Это означает, что каждая линейная форма $\Phi : V^* \to \Bbbk$ на пространстве V^* является функционалом вычисления значения на некотором векторе $v \in V$, однозначно определяемым формой Φ, а любой базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ пространства V^* является набором координатных форм e_i^* для единственного базиса[2] $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$.

Упражнение 7.4. Пусть $\dim V = n$ и наборы $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in V^*$ таковы, что $\varphi_i(v_i) = 1$ и $\varphi_i(v_j) = 0$ при $i = j$. Покажите, что

а) оба набора являются базисами

б) любой вектор v выражается через векторы v_i с коэффициентами $\varphi_i(v)$.

Пример 7.3 (формула Лагранжа)

Зафиксируем $n+1$ различных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ и рассмотрим на пространстве многочленов степени не выше n функционалы вычисления $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, сопоставляющие многочлену f его значения $f(a_0)$, $f(a_1)$, … , $f(a_n)$ в точках $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$. Многочлен

$$f_i(x) = \prod_{\nu \neq i} (x - a_\nu)$$

имеет степень n и обращается в нуль во всех точках a_ν кроме точки a_i, где его значение отлично от нуля. Стало быть, многочлены $v_i(x) = f_i(x)/f_i(a_i)$ и формы φ_i удовлетворяют условию упр. 7.4 и являются двойственными друг другу базисами, а разложение произвольного многочлена $g(x) \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$ по базису $v_0, v_1, \dots, v_n$ имеет вид

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m} g(a_i) \cdot v_i(x) = \sum_{i=0}^{m} g(a_i) \cdot \frac{\prod_{\nu \neq i}(x - a_\nu)}{\prod_{\nu \neq i}(a_i - a_\nu)}. \tag{7-3}$$

Таким образом, для любого наперёд заданного набора значений $g_0, g_1, \dots, g_n \in \Bbbk$ эта формула задаёт *единственный* многочлен $g \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$, принимающий значения $g(a_i) = g_i$ при всех i. Формула (7-3) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

[1] т. е. не прибегающее к фиксации каких-либо дополнительных данных вроде базиса

[2] а именно, для двойственного к $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ базиса в $V^{**} = V$

Пример 7.4 (формула Тейлора)
Пусть поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль[3]. Зафиксируем $a \in \Bbbk$ и рассмотрим на пространстве многочленов степени не выше n функционалы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, сопоставляющие многочлену f его значение и значения первых n его производных в точке a:

$$f(a),\ f'(a),\ \dots\ ,\ f^{(n)}(a)\,.$$

Многочлены $v_k = (x-a)^k/k!$ и формы φ_k удовлетворяют условию упр. 7.4, а значит, являются двойственными друг другу базисами, и произвольный многочлен $g(x) \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$ обладает единственным разложением

$$g(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x-a) + g''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + g^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}\,, \tag{7-4}$$

которое называется *разложением Тэйлора* многочлена g в точке a.

7.1.2. Свёртка. Будем называть *свёрткой* (или *спариванием*) между векторными пространствами V и W отображение

$$V\times W \to \Bbbk\,,\quad v,w \mapsto \langle\, v\,,\, w\,\rangle\,, \tag{7-5}$$

сопоставляющее каждой паре векторов $v\in V$, $w\in W$ число $\langle\, v\,,\, w\,\rangle \in \Bbbk$, которое линейно зависит от v при фиксированном w и линейно зависит от w при фиксированном v, т. е. для любых векторов $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \Bbbk$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}&\left\langle\, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\,,\, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2\,\right\rangle = \\ &\qquad = \lambda_1\mu_1 \left\langle\, v_1\,,\, w_1\,\right\rangle + \lambda_1\mu_2\left\langle\, v_1\,,\, w_2\,\right\rangle + \lambda_2\mu_1\left\langle\, v_2\,,\, w_1\,\right\rangle + \lambda_2\mu_2\left\langle\, v_2\,,\, w_2\,\right\rangle\,.\end{aligned}$$

Спаривание называется *невырожденным*, если оно удовлетворяет условиям следующей леммы:

Лемма 7.1
Следующие свойства свёртки (7-5) равносильны друг другу:

1) для каждого ненулевого $v\in V$ найдётся $w\in W$, а для каждого ненулевого $w \in W$ найдётся $v\in V$, такие что $\langle\, v\,,\, w\,\rangle \neq 0$.

2) отображение $V\to W^*$, сопоставляющее вектору v линейную форму $w\mapsto \langle\, v\,,\, w\,\rangle$ на W, является изоморфизмом

3) отображение $W\to V^*$, сопоставляющее вектору w линейную форму $v\mapsto \langle\, v\,,\, w\,\rangle$ на V, является изоморфизмом

Доказательство. В силу линейности $\langle\, v\,,\, w\,\rangle$ по v и по w, оба отображения, о которых идёт речь в (2) и (3), корректно определены и линейны. Условие (1) утверждает, что оба они инъективны. Поэтому из (1) вытекают неравенства $\dim V \leqslant \dim W^*$ и $\dim W \leqslant \dim V^*$. Так как $\dim V = \dim V^*$ и $\dim W = \dim W^*$, оба эти неравенства являются равенствами,

[3]это означает, что сумма конечного числа единиц поля $\Bbbk$ никогда не равна нулю или, эквивалентно, что наименьшее подполе в $\Bbbk$, содержащее 0 и 1, изоморфно полю $\mathbb{Q}$

а вложения (2) и (3) — изоморфизмы. Таким образом, из (1) вытекают (2) и (3). Наоборот, если выполняется одно из условий (2) или (3), то автоматически выполняется и второе[1], а значит, и условие (1). □

Пример 7.5 (свёртка векторов с ковекторами)
Свёртка между конечномерными пространствами V^* и V, задаваемая вычислением значения линейных форм на векторах $\langle \varphi , v \rangle = \varphi(v)$ невырождена. Обозначение стоящее в левой части подчёркивает симметрию между V и V^*, и мы будем им часто пользоваться в дальнейшем.

Пример 7.6 (определитель на $\Bbbk^2$)
На координатной плоскости $V = \Bbbk^2$ имеется невырожденная свёртка $V \times V \to \Bbbk$, задаваемая определителем из прим. 6.4 на стр. 85 : $\langle a , b \rangle = \det(a, b)$. В частности, любая линейная форма $\varphi : \Bbbk^2 \to \Bbbk$ имеет вид $\varphi(a) = \det(b_\varphi, a)$, где $b_\varphi \in \Bbbk^2$ — некоторый вектор, однозначно определяемый по форме φ.

7.2. **Аннуляторы**. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0, \xi \in M$, на вектор $x \in V$. Множество всех решений этой системы обозначается

$$\operatorname{Ann}(M) = \{v \in V \mid \xi(v) = 0 \quad \forall\, \xi \in M \} \subset V\,.$$

и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$. Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \to \Bbbk$ по всем $\xi \in M$, аннулятор произвольного множества ковекторов $M \subset V^*$ всегда является векторным подпространством в V.

Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим

$$\operatorname{Ann}(N) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \;\; \forall\, v \in N \} \subset V^*\,.$$

Алгебраически, $\operatorname{Ann}(N)$ это множество всех линейных уравнений $\xi(x) = 0$, решения которых содержат все векторы из N. Геометрически — это множество всех проходящих через N гиперплоскостей в V. Вместе с тем, как и выше, $\operatorname{Ann}(N) \subset V^*$ есть множество решений системы однородных уравнений $\mathrm{ev}_v(y) = 0$, $v \in N$, на ковектор $y \in V^*$ или, что то же самое, пересечение гиперплоскостей $\operatorname{Ann}(v) \subset V^*$ по всем $v \in N$. В частности, $\operatorname{Ann}(N)$ является векторным подпространством в V^*.

Упражнение 7.5. Убедитесь, что аннулятор любого множества совпадает с аннулятором его линейной оболочки.

Предложение 7.2
$\dim U + \dim \operatorname{Ann} U = \dim V$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots , u_k \in U$ и дополним его векторами $w_1, w_2, \dots , w_m$ до базиса в V (таким образом, $\dim V = k + m$) и обозначим через

$$u_1^*, u_2^*, \dots , u_k^*,\; w_1^*, w_2^*, \dots , w_m^* \in V^*$$

[1]это переформулировка канонического отождествления $W \simeq W^{**}$: если V изоморфно W^*, то и W изоморфно $V^* = W^{**}$

двойственный базис. Тогда $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in \operatorname{Ann} U$, поскольку для любого $v = \sum x_i u_i \in U$

$$w_\nu^*(v) = w_\nu^* \left(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k\right) = \sum x_i \cdot w_\nu^*(u_i) = 0\,.$$

Так как любой ковектор $\varphi = \sum y_i u_i^* + \sum z_j w_j^* \in \operatorname{Ann}(U)$ имеет $y_i = \varphi(u_i) = 0$, базисные ковекторы $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$ линейно порождают $\operatorname{Ann}(U)$, а значит, образуют там базис. Тем самым, $\dim \operatorname{Ann}(U) = m = \dim V - \dim U$. □

Следствие 7.1
$\operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U) = U$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. $U \subset \operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U)$ и по предл. 7.2 $\dim \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = \dim U$. □

Замечание 7.1. Для любого подпространства $U \subset V^*$ также выполняются равенства

$$\dim U + \dim \operatorname{Ann} U = \dim V \quad \text{и} \quad \operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U) = U\,.$$

Они получаются, если в предл. 7.2 и сл. 7.1 взять в них взять в качестве V двойственное пространство V^* и воспользоваться каноническим отождествлением V^{**} с V.

Замечание 7.2. На языке линейных уравнений предл. 7.2 означает, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m. А сл. 7.1 утверждает, что любая линейная форма, зануляющаяся на множестве решений произвольно заданной системы линейных однородных уравнений линейно выражается через уравнения этой системы.

Упражнение 7.6. Покажите, что $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} N = \operatorname{span} N$ для любого подмножества $N \subset V$.

Теорема 7.1
Соответствие $U \leftrightarrow \operatorname{Ann}(U)$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^*. Эта биекция оборачивает включения: $U \subset W \iff \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W$, и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V. Равенство $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U) = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(V) \arrow[r, bend left, "U\mapsto \operatorname{Ann} U"] & \mathcal{S}(V^*) \arrow[l, bend left, "\operatorname{Ann} W \leftarrow\!\shortmid W"] \end{tikzcd}$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W, соответственно, подпространства $\operatorname{Ann} W$ и $\operatorname{Ann} U$ и воспользоваться равенствами $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W = W$ и $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$, получим обратную импликацию $\operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_\nu \operatorname{Ann}(U_\nu) = \operatorname{Ann}\left(\sum_\nu U_\nu\right) \tag{7-6}$$

очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_ν, зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом из них в отдельности. Если взять в (7-6) в качестве подпространств U_ν пространства $\operatorname{Ann} U_\nu$, получаем равенство $\bigcap_\nu U_\nu = \operatorname{Ann}\left(\sum_\nu \operatorname{Ann} U_\nu\right)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, получаем равенство $\operatorname{Ann}\left(\bigcap_\nu W_\nu\right) = \sum_\nu \operatorname{Ann}(W_\nu)$. □

Следствие 7.2
Для любого подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы

$$(V/U)^* \simeq \operatorname{Ann}(U) \quad \text{и} \quad U^* \simeq V^*/\operatorname{Ann}(U)\,.$$

Доказательство. Если форма $\varphi \in \operatorname{Ann} U$, то для любых $u \in U$ и $v \in V$ выполняются равенства $\varphi(v+u) = \varphi(v) + \varphi(u) = \varphi(v)$. Поэтому правило $\widetilde{\varphi}([v]) = \varphi(v)$ корректно задаёт линейную форму $\widetilde{\varphi}$ на факторе V/U. Отображение

$$\operatorname{Ann}(U) \to (V/U)^*\,, \quad \varphi \mapsto \widetilde{\varphi}\,,$$

линейно и имеет нулевое ядро. Так как размерности пространств одинаковы, это изоморфизм. Для доказательства второго изоморфизма рассмотрим оператор $V^* \to U^*$, переводящий линейную форму на V в её ограничение на $U \subset V$. Поскольку ядро этого оператора это $\operatorname{Ann} U$, его образ изоморфен $V^*/\operatorname{Ann}(U) \subset U^*$. Так как размерности обоих пространств одинаковы, вложение является равенством. □

7.3. **Двойственные операторы**. С каждым линейным отображением $F : U \to W$ связано *двойственное* (или *сопряжённое*) линейное отображение $F^* : W^* \to V^*$, действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлении и переводящее ковектор $\xi : W \to \Bbbk$ в его композицию с F:

$$F^*(\xi) = \xi \circ F : u \mapsto \xi\big(F(u)\big)\,.$$

Упражнение 7.7. Проверьте, что $\varphi \circ F$ является линейным отображением из U в $\Bbbk$ и линейно зависит как от ξ так и от F.

Из упражнения вытекает, что сопряжение опреаторов $F \mapsto F^*$ является линейным отображением

$$\operatorname{Hom}(U,V) \to \operatorname{Hom}(W^*, U^*)\,. \tag{7-7}$$

В более симметричных обозначениях из прим. 7.5 выше действие F на векторы $u \in U$ и действие F^* на ковекторы $\xi \in W^*$ выражаются друг через друга по формуле

$$\langle\, F^*\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, Fv\,\rangle \quad \forall\, \xi \in W^*,\, v \in V\,, \tag{7-8}$$

которая показывает, что при отождествлении V^{**} с V оператор $F^{**} : V^{**} \to W^{**}$ отождествляется с F. Таким образом, операции сопряжения сопряжения $F \mapsto F^*$ и $F^* \mapsto F^{**} = F$ обратны друг другу, и оператор сопряжения (7-7) является изоморфизмом.

Упражнение 7.8. Докажите, что $\left(F \circ G\right)^* = G^* \circ F^*$.

Предложение 7.3
Имеют место равенства $\ker F^* = \operatorname{Ann}\operatorname{im} F$ и $\operatorname{im} F^* = \operatorname{Ann}\ker F$.

Доказательство. Первое равенство очевидно из формулы (7-8):

$$\xi \in \operatorname{Ann}\operatorname{im} F \iff \langle\, \xi \,,\, Fv \,\rangle = 0 \;\; \forall\, v\in V \iff \langle\, F^*\xi \,,\, v \,\rangle = 0 \;\; \forall\, v\in V \iff F^*\xi = 0\,.$$

Второе получается взятием аннуляторов от обеих частей первого равенства, написанного для оператора F^*. □

Следствие 7.3
Инъективность F равносильна сюрьективности F^*. Двойственным образом, сюрьективность F равносильна инъективности F^*.

7.3.1. Матрица двойственного оператора. Выберем в U и U^* двойственные базисы $\{u_j\}$ и $\{u_j^*\}$, а в W и W^* — двойственные базисы $\{w_i\}$ и $\{w_i^*\}$, и сопоставим оператору $F : U \to W$ его матрицу $F_{wu} = \left(f_{ij}\right)$ в базисах u и w. Напомним[1], что в j-том столбце матрицы F_{wu} стоят координаты f_{ij} (где $1 \leqslant i \leqslant m$) образа j-того базисного вектора u_j в базисе w, т. е. коэффициенты разложения $F(u_j) = f_{1j}w_1 + f_{2j}w_2 + \cdots + f_{mj}w_m$, или свёртки

$$f_{ij} = \left\langle\, w_i^* \,,\, Fu_j \,\right\rangle = \left\langle\, F^*w_i^* \,,\, u_j \,\right\rangle\,.$$

Эта же свёртка является одновременно j-той координатой ковектора $F^*(w_i)$ в базисе u^*, т. е. (j,i)-тым элементом f_{ji}^* матрицы $F^*_{u^*w^*} = \left(f_{ij}^*\right)$ двойственного оператора F^* в двойственных базисах. Иначе говоря, i-тая строка матрицы F_{wu} является i-тым столбцом матрицы $F^*_{u^*w^*}$, а j-тый столбец матрицы F_{wu} является i-той строкой матрицы $F^*_{u^*w^*}$.

Матрица A^t по строкам которой записаны сверху вниз прочитанные слева направо столбцы[1] матрицы A называется *транспонированной* к матрице A. На языке формул, матрица $A^t = \left(a_{ij}^t\right)$, транспонированная к матрице $A = \left(a_{ij}\right)$, имеет $a_{ij}^t = a_{ji}$.

Итак, матрицы двойственных операторов в двойственных базисах получаются друг из друга транспонированием: $F^*_{u^*w^*} = F^t_{wu}$.

Следствие 7.4 (теорема о ранге матрицы)
У любой матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ размерность линейной оболочки её строк в $\Bbbk^n$ и размерность линейной оболочки её столбцов в $\Bbbk^m$ равны друг другу. Это число называется *рангом* матрицы A и обозначается $\operatorname{rk} A$.

Доказательство. Обозначим через $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ линейный оператор, матрица которого в стандартных базисах этих двух координатных пространств равна A. Тогда размерность линейной оболочки столбцов матрицы A равна $\dim\operatorname{im} F$, а размерность линейной оболочки строк матрицы A равна $\dim\operatorname{im} F^*$, где $F^* : \Bbbk^{m*} \to \Bbbk^{n*}$ — двойственный к F оператор. По предл. 7.3 и предл. 6.1 $\dim\operatorname{im} F^* = \dim\operatorname{Ann}\ker F = n - \dim\ker F = \dim\operatorname{im} F$. □

[1] см. 6-19 на стр. 93

[1] по-другому можно сказать, что матрица A^t получается из матрицы A отражением относительно биссектрисы левого верхнего угла — прямой $i = j$

Следствие 7.5 (теорема Кронекера – Капелли)
Система (неоднородных) линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство. Наличие у системы решения означает, что столбец правых частей b лежит в линейной оболочке столбцов матрицы $A = (a_{ij})$. Это равносильно тому, что при добавлении к матрице A столбца b размерность линейной оболочки столбцов не меняется. □

Следствие 7.6
Размерность пространства решений системы однородных линейных уравнений на n переменных с матрицей коэффициентов A равна $n - \operatorname{rk} A$.

Доказательство. $\dim \ker = n - \dim \operatorname{im} A = n - \operatorname{rk} A$. □

7.4. **Метод Гаусса**. Пусть подпространство $U \subset \Bbbk^n$ задано как линейная оболочка k векторов

$$\begin{aligned} w_1 &= (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}) \\ w_2 &= (w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_k &= (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}), \end{aligned} \tag{7-9}$$

Мы собираемся построить в U такой базис $u_1, u_2, \dots, u_r$, что матрица вида (7-9), по строкам которой записаны координаты векторов u_i, будет иметь в некоторых r столбцах с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ *единичную подматрицу* размера $r \times r$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

т. е. базис $u_1, u_2, \dots, u_r$ будет удовлетворять условию (4) из предл. 6.7 на стр. 100. Идея построения состоит в том, чтобы обнулять координаты в столбцах матрицы (7-9), последовательно заменяя подходящие пары векторов w_i, w_j их линейными комбинациями

$w'_i = aw_i + bw_j$ и $w'_j = cw_i + dw_j$ так, чтобы линейная оболочка этой пары не менялась. Таковы, например, замены следующих трёх типов:

$$\begin{aligned} &1)\quad w'_i = w_i + \lambda w_j \quad && w'_j = w_j \quad && (\text{с любым } \lambda \in \Bbbk \text{ любое}) \\ &2)\quad w'_i = w_j && w'_j = w_i && \\ &3)\quad w'_i = \varrho w_i && w'_j = w_j && (\text{с ненулевым } \varrho \in \Bbbk) \end{aligned} \tag{7-10}$$

Исходные векторы линейно выражаются в них через преобразованные как

$$\begin{aligned} w_i &= w'_i - \lambda w'_j \quad & w_j &= w'_j \\ w_i &= w'_j & w_j &= w'_i \\ w_i &= \varrho^{-1} w'_i & w_j &= w'_j\,. \end{aligned}$$

При заменах (7-10) матрица $\left(w_{ij}\right)$, по строкам которой стоят координаты векторов (7-9), испытывает следующие *элементарные преобразования строк*:

1. к одной из строк прибавляется другая, умноженная на любое число[1]
2. какие-нибудь две строки матрицы меняются местами
3. одна из строк умножается на ненулевое число.

Лемма 7.2 (о приведении к строгому ступенчатому виду)
Всякая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ элементарными преобразованиями строк приводится к виду, в котором самый левый ненулевой элемент каждой строки равен 1, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом своего столбца.

Доказательство. Удобно разбить процесс на n последовательных шагов (по количеству столбцов). Будем предполагать, что после выполнения $(k-1)$-го шага та часть матрицы, что находится слева от k-ого столбца, имеет нужный вид (при $k = 1$ это ничего не означает). Пусть в этой части имеется s ненулевых строк. По нашему предположению $0 \leqslant s \leqslant k-1$ и эти строки являются верхними. Очередной k-тый шаг вычисления состоит из следующих действий.

Выберем в k-том столбце в строках строго ниже s-той какой-нибудь ненулевой элемент a (если его нет, можно перейти к $(k+1)$-му шагу). Умножим строку, где он стоит, на a^{-1}. Потом поменяем эту строку местами с $(s+1)$-ой строкой. Это не изменит левые $(k-1)$ столбцов матрицы, а $(s+1)$-ую строку приведёт к виду

$$\underbrace{0\,0\,\dots\,0\,0}_{k-1}\ 1\ \underbrace{*\,*\,\dots\,*\,*}_{n-k}\ .$$

Теперь для каждого $i \neq s+1$ вычтем из i-той строки $(s+1)$-ую строку, умноженную на элемент, стоящий в пересечении i-той строки и k-того столбца. Это не изменит левые $(k-1)$ столбцов матрицы и занулит все элементы k-того столбца за исключением стоящей $(s+1)$-ой строке единицы. В результате мы попадаем в исходное положение для $(k+1)$-го шага. □

[1]подчеркнём, что все остальные строки (в том числе та, что прибавлялась) остаются без изменения

7.4.1. Отыскание базисов в линейной оболочке и факторе. Поскольку линейная оболочка строк матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, ненулевые строки $u_1, u_2, \dots, u_r$ итоговой строгой ступенчатой матрицы порождают то же самое подпространство U, что и строки $w_1, w_2, \dots, w_k$ исходной матрицы (7-9), но при этом удовлетворяют условию (4) из предл. 6.7, в котором в качестве $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ следует взять номера тех столбцов, где стоят самые левые единицы строк строгой ступенчатой матрицы. По предл. 6.7 строки ступенчатой матрицы составляют базис в U, а классы базисных векторов $e_j \in \Bbbk^n$ с $j \notin I$, образуют базис в $\Bbbk^n/U$.

Пример 7.7
Найдём базис в линейной оболочке U четырёх векторов координатного пространства $\mathbb{Q}^5$, строки которых образуют матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7-11}$$

умножим последнюю строку на -1 и поменяем местами с первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

зануляем первый столбец под первой строкой, добавляя ко всем строкам подходящие кратности первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

теперь зануляем второй столбец под второй строкой, добавляя подходящие её кратности к последним двум строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

делим третью строку на -2 и зануляем последний столбец вне третьей строки, добавляя к первой и четвёртой строкам подходящие кратности третьей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7-12}$$

Получилась строгая ступенчатая матрица. Её строки составляют базис в линейной оболочке строк исходной матрицы (7-11). Таким образом, $\dim U = 3$ и U изоморфно проектируется на трёхмерное координатное подпространство

$$E_{(1,2,5)} = \operatorname{span}(e_1,\, e_2,\, e_5)$$

вдоль дополнительного к нему двумерного координатного подпространства

$$E_{(3,4)} = \operatorname{span}(e_3,\ e_4)$$

так что строки матрицы (7-12) переходят при такой проекции в точности в стандартные базисные векторы e_1, e_2, e_3. Тем самым, подпространство U имеет нулевое пересечение с ядром этой проекции, т. е. $U \cap E_{(3,4)} = 0$. Поэтому координатное подпространство $E_{(3,4)}$ изоморфно проектируется на фактор $\mathbb{Q}^5/U$, и классы $e_3 \pmod U$ и $e_4 \pmod U$ образуют в нём базис.

Упражнение 7.9. Покажите, что r-мерное пространство U, заданное координатами каких-нибудь $m \geqslant r$ порождающих векторов (7-9), изоморфно проектируется на координатное подпространство E_I тогда и только тогда, когда в матрице (7-9), по строкам которой написаны координаты этих векторов, в столбцах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ находится $m \times r$ подматрица ранга r.

Пример 7.8

На двойственном языке вычисление (7-11) – (7-12) выглядит как решение системы линейных уравнений. А именно, аннулятор $\operatorname{Ann} U \subset \mathbb{Q}^{5*}$ подпространства $U \subset \mathbb{Q}^5$, порождённого строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7-13}$$

есть пространство решений системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\,x_1 - 4\,x_2 - 8\,x_3 + 2\,x_4 - 4\,x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3\,x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2\,x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \tag{7-14}$$

матрица коэффициентов которой есть матрица (7-13). Приведя её к строгому ступенчатому виду (7-12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

мы выбрали в пространстве уравнений U базис, состоящий из уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

которые эквивалентны исходным уравнениям (7-14), но допускают явное выражение переменных x_1, x_2, x_5 через переменные x_3 и x_4

$$\begin{cases} x_1 = 2\,x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \tag{7-15}$$

Переменные x_3 и x_4 называются в этой ситуации *свободными* (им можно придавать любые значения), а переменные x_1, x_2 и x_5 — *связанными* (они однозначно определяются из (7-15) как только заданы какие-нибудь значения свободных переменных). На геометрическом языке это означает, что двумерное пространство $\mathrm{Ann}(U) \simeq \left(\mathbb{Q}^5/U\right)^*$ изоморфно проектируется в $\mathbb{Q}^{5^*}$ на координатное подпространство $E^*_{3,4} = \mathrm{span}\left(e^*_3,\, e^*_4\right)$ вдоль дополнительного координатного подпространства $E^*_{1,2,5} = \mathrm{span}\left(e^*_1,\, e^*_2,\, e^*_5\right)$. В частности, в пространстве $\mathrm{Ann}(U) \simeq \left(\mathbb{Q}^5/U\right)^*$ решений системы (7-14) есть базис из ковекторов вида[1] $u_1^\perp = (\,*\,,\,*\,,\,1\,,\,0\,,\,*\,)$, $u_2^\perp = (\,*\,,\,*\,,\,0\,,\,1\,,\,*\,)$. Отмеченные звёздочками координаты легко находятся из (7-15) и равны $(\,2\,,\,-1\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,)$ и $(\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,)$.

7.4.2. **Решение системы линейных уравнений.** Пространство решений произвольной системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{7-16}$$

описывается аналогично. Обозначим через $U \subset \Bbbk^n$ линейную оболочку строк матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$. Тогда пространство решений системы (7-16) представляет собой аннулятор $\mathrm{Ann}(U) \simeq \left(\Bbbk^n/U\right)^*$. Если выбрать в пространстве уравнений U базис вида

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{i_1} + \alpha_{1j_1}e_{j_1} + \alpha_{1j_2}e_{j_2} + \cdots + \alpha_{1j_{n-r}}e_{j_{n-r}} \\ u_2 &= e_{i_2} + \alpha_{2j_1}e_{j_1} + \alpha_{2j_2}e_{j_2} + \cdots + \alpha_{2j_{n-r}}e_{j_{n-r}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_r &= e_{i_r} + \alpha_{rj_1}e_{j_1} + \alpha_{rj_2}e_{j_2} + \cdots + \alpha_{rj_{n-r}}e_{j_{n-r}} \end{aligned} \tag{7-17}$$

удовлетворяющий условию (4) из предл. 6.7, то матрица $\left(\alpha_{ij}\right)$ соответствующей ему системы уравнений содержит единичную подматрицу размера $r\times r$ в столбцах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$.

Упражнение 7.10. Пусть $e^*_1,\, e^*_2,\, \dots\,,\, e^*_n$ обозначают стандартный базис[1] в $\Bbbk^{n*}$. Положим

$$E^*_J = \mathrm{span}\big(e^*_{j_1},\, e^*_{j_2},\, \dots\,,\, e^*_{j_{n-r}}\big) \quad \text{и} \quad E^*_I = \mathrm{span}\big(e^*_{i_1},\, e^*_{i_2},\, \dots\,,\, e^*_{i_r}\big)\,.$$

Покажите, что если подпространство $U \subset \Bbbk^n$ удовлетворяет условиям из предл. 6.7 на стр. 100, то его аннулятор $\mathrm{Ann}\,U \subset \Bbbk^{n*}$ обладает следующими эквивалентными друг другу свойствами: а) $\mathrm{Ann}\,U \cap E^*_I = 0$ б) E^*_I изоморфно отображается на $\Bbbk^{n*}/\mathrm{Ann}\,U$ в) проекция $c_J\,:\,\Bbbk^{n*} \twoheadrightarrow E^*_J$ вдоль E^*_I изоморфно отображает U на E^*_J г) в $\mathrm{Ann}\,U$ есть $(n-r)$ ковекторов вида $u^\perp_\mu = e^*_{j_\mu} + \tau_\mu$, где $\tau_\mu \in E^*_J$. При этом векторы, о которых идёт

[1]эти ковекторы являются прообразами стандартных базисных ковекторов e^*_3, e^*_4 относительно проекции $\mathrm{Ann}(U) \twoheadrightarrow E^*_{(3,4)}$ вдоль $E_{(1,2,5)}$ и образуют базис в $\left(\mathbb{Q}^5/U\right)^* \simeq \mathrm{Ann}(U)$, двойственный к обсуждавшемуся выше базису $e_3 \pmod U$, $e_4 \pmod U$ в факторе $\mathbb{Q}^5/U$

[1]двойственный к стандартному базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства $\Bbbk^n$

речь в (г), единственны, образуют базис в $\operatorname{Ann} U$ и связаны с векторами $u_\nu = e_{i_\nu} + w_\nu \in U$ из условия (4) в предл. 6.7 на стр. 100 формулой

$$\tau_\mu = -\left\langle e^*_{j_\mu}, w_1 \right\rangle \cdot e^*_{i_1} - \left\langle e^*_{j_\mu}, w_2 \right\rangle \cdot e^*_{i_2} - \cdots - \left\langle e^*_{j_\mu}, w_r \right\rangle \cdot e^*_{i_r}. \tag{7-18}$$

Согласно упр. 7.10 ковекторы

$$\begin{aligned} u_1^\perp &= e^*_{j_1} - \alpha_{1j_1} e^*_{i_1} - \alpha_{2j_1} e^*_{i_2} - \cdots - \alpha_{rj_1} e^*_{i_r} \\ u_2^\perp &= e^*_{j_1} - \alpha_{1j_2} e^*_{i_1} - \alpha_{2j_2} e^*_{i_2} + \cdots - \alpha_{rj_2} e^*_{i_r} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-r}^\perp &= e^*_{j_{n-r}} - \alpha_{1j_{n-r}} e^*_{i_1} - \alpha_{2j_{n-r}} e^*_{i_2} - \cdots - \alpha_{rj_{n-r}} e^*_{i_r} \end{aligned} \tag{7-19}$$

составляют базис пространства $\operatorname{Ann}(U) \subset \Bbbk^{n*}$ решений системы (7-16).

Упражнение 7.11. Проверьте это независимо от упр. 7.10.

Иначе можно сказать, что базисные решения $u_j^\perp$ получаются приданием одной из свободных переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}$ значения 1, остальным свободным переменным — значения нуль, а каждой связанной переменной x_{i_ν} — того значения, которое получается из единственного содержащего x_{i_ν} уравнения.

7.4.3. **Расположение подпространства относительно базиса**. Покажем, что с точностью до добавления нулевых строк результат приведения к строгому ступенчатому виду матрицы координат любого набора векторов, порождающих данное подпространство $U \subset \Bbbk^n$, не зависит ни от выбора этих векторов, ни от способа приведения.

Для этого рассмотрим убывающую цепочку координатных подпространств

$$V = V^0 \supset V^1 \supset V^2 \supset \cdots \supset V^{n-1} \supset V^n = 0, \tag{7-20}$$

в которой $V^i = \operatorname{span}\left(e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n\right)$, и обозначим через $\pi_i : V \twoheadrightarrow V/V^i$ отображение факторизации[1]. Цепочка (7-20) называется *полным флагом*. Сопоставим каждому r-мерному подпространству $U \subset V$ набор неотрицательных целых чисел $d_i = \dim \pi_i(U) = r - \dim U \cap V^i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$. Числа $d_0, d_1, \dots, d_n$ образуют неубывающую последовательность, которая начинается с $d_0 = 0$, заканчивается на $d_n = r$ и прирастает не более, чем на единицу за один шаг: $d_i - d_{i-1} \leqslant 1$.

Упражнение 7.12. Докажите это.

Например, для подпространства $U \subset \mathbb{Q}^5$, порождённого строками матрицы (7-12), получаем последовательность $(d_0, d_1, \dots, d_5) = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$.

Набор $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ тех номеров, в которых происходят ненулевые приращения $d_{i_\nu} - d_{i_\nu - 1} = 1$, зависит только от подпространства U и флага (7-20). Мы будем называть его *комбинаторным типом* U относительно полного координатного флага (7-20). Так, подпространство $U \subset \mathbb{Q}^5$, порождённое строками матрицы (7-12) имеет комбинаторный тип $I = (1, 2, 5)$.

Упражнение 7.13. Убедитесь, что комбинаторный тип подпространства, порождённого строками строгой ступенчатой матрицы, всегда представляет собою набор номеров тех столбцов, где стоят самые левые единицы строк.

[1] ограничение π_i на координатное подпространство $E_i = \operatorname{span}(e_1, e_2, \dots, e_i)$ задаёт изоморфизм $E_i \xrightarrow{\sim} V/V^i$, при помощи которого можно отождествить π_i с проекцией $\Bbbk^n$ на E_i вдоль V^i, т. е. с забыванием последних $(n - i)$ координат в $\Bbbk^n$

Таким образом, форма ступенчатой матрицы, однозначно определяется флагом (7-20) и подпространством U. Поскольку базис $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r} \in U$, проектирующийся в стандартные базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}$ вдоль дополнительного координатного подпространства E_J тоже единственен по предл. 6.7 на стр. 100, ненулевые строки строгой ступенчатой матрицы, которая получится при применении метода Гаусса к матрице координат любой системы порождающих векторов пространства U, зависит только от самого подпространства U и зафиксированного нами с самого начала стандартного базиса в $\Bbbk^n$, в котором записываются координаты всех векторов. Мы доказали

Следствие 7.7

В каждом подпространстве $U \subset \Bbbk^n$ существует единственный базис со строгой ступенчатой матрицей координат M_U, и сопоставление подпространству U матрицы M_U устанавливает биекцию между строгими ступенчатыми матрицами с r ненулевыми строками и r-мерными подпространствами в $\Bbbk^n$. □

Упражнение 7.14. Покажите, что строгие ступенчатые матрицы комбинаторного типа $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ образуют в $\mathrm{Mat}_{r\times n}(\Bbbk)$ аффинное подпространство размерности $r(n-r) - \sum\limits_{\nu=1}^{r}(i_\nu - \nu + 1)$.

Упр. 7.4. Набор $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ линейно независим, поскольку применяя ξ_i к обеим частям соотношения $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ получаем $\lambda_i = 0$ (и так для каждого i). Поскольку $\dim V = n$, этот набор является базисом, тогда из условия вытекает, что ξ_i составляют двойственный базис, т. е. являются координатами вдоль v_i.

Упр. 7.5. Если линейная форма зануляется на неких векторах, то она зануляется и на любой их линейной комбинации.

Упр. 7.8. Типичный для алгебры перенос из левой части в правую:

$$\langle G^*F^*\xi \, , \, v \rangle = \langle F^*\xi \, , \, Gv \rangle = \langle \xi \, , \, FGv \rangle$$

Упр. 7.9. При проекции $c_I : \Bbbk^n \twoheadrightarrow E_I$ векторы w_i перейдут в строки этой подматрицы, и для того, чтобы $c_I|_U$ была изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы размерность их линейной оболочки была r.

Упр. 7.10. Эквивалентность свойств (а) – (г) и единственность базиса (г) следуют из предл. 6.7 на стр. 100, применённой к подпространству $\operatorname{Ann} U \subset \Bbbk^{n*}$. Покажем, что $u_\mu^\perp = e^*_{j_\mu} + \tau_\mu$ с

$$\tau_\mu = -\sum_{\nu=1}^{r} \left\langle e^*_{j_\mu} \, , \, w_\nu \right\rangle \cdot e^*_{i_\nu}$$

составляют базис в $\operatorname{Ann} U$. Они лежат в $\operatorname{Ann} U$, поскольку

$$\langle u_\mu^\perp \, , \, u_\nu \rangle = \left\langle e^*_{j_\mu} + \tau_\mu \; , \; e_{i_\nu} + w_\nu \right\rangle = \left\langle e^*_{j_\mu} \, , \, w_\nu \right\rangle + \left\langle \tau_\mu \, , \, e_{i_\nu} \right\rangle =$$
$$= \left\langle e^*_{j_\mu} \, , \, w_\nu \right\rangle - \sum_{\alpha=1}^{r} \left\langle e^*_{j_\mu} \, , \, w_\alpha \right\rangle \cdot \left\langle e^*_\alpha \, , \, e_{i_\nu} \right\rangle = \left\langle e^*_{j_\mu} \, , \, w_\nu \right\rangle - \left\langle e^*_{j_\mu} \, , \, w_\nu \right\rangle = 0$$

и линейно независимы, так как $e^*_{j_\mu}$ линейно независимы.

Упр. 7.11. Векторы $u_\nu^\perp$ линейно независимы, поскольку базисный ковектор $e^*_{j_\nu}$ входит только в u_ν и не может быть сокращён никакой линейной комбинацией остальных u_μ. Они все лежат в $\operatorname{Ann} U$, так как

$$\langle u_\nu^\perp \, , \, u_\mu \rangle = \left\langle e^*_{j_\nu} - \sum_k \alpha_{kj_\nu} e^*_{i_k} \, , \, e_{i_\mu} + \sum_\ell \alpha_{\mu j_\ell} e_{j_\ell} \right\rangle = \alpha_{\mu j_\nu} \left\langle e^*_{j_\nu} \, , \, e_{j_\nu} \right\rangle - \alpha_{\mu j_\nu} \left\langle e^*_{i_\mu} \, , \, e_{i_\mu} \right\rangle = 0$$

Упр. 7.12. Поскольку пространство V^i порождается пространством V^{i+1} и вектором e_i, пространство $U \cap V^i$ содержится в линейной оболочке $U \cap V^{i+1}$ и вектора e_i, размерность которой, отличается от $\dim(U \cap V_{i+1})$ не больше, чем на единицу.

Упр. 7.13. Для такого подпространства $d_i = \dim \pi_i(U)$ равна числу ненулевых строк в подматрице, сосредоточенной в первых i столбцах.

Упр. 7.14. Если отнять из произвольной матрицы комбинаторного типа I матрицу E_I, в столбцах I которой стоит единичная $r \times r$ подматрица, а в остальных местах нули, получится матрица имеющая нули в столбцах I, а также при всех $\nu = 1, \dots, r$ нули в строке ν в позициях с 1-й по i_ν-тую включительно. Такие матрицы составляют в $\operatorname{Mat}_{r\times n}(\Bbbk)$ векторное подпространство указанной коразмерности $r^2 + \sum_{\nu=1}^{r}(i_\nu - \nu + 1)$.