

§14. Пространство с билинейной формой

14.1. Билинейные формы. Пусть V — векторное пространство над полем \mathbb{k} . отображение $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$, $(u, w) \mapsto \beta(u, w)$, линейное по каждому из двух аргументов при фиксированном другом, называется *билинейной формой* на пространстве V . Билинейность означает, что при всех $\lambda \in \mathbb{k}$ и $u, w \in V$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\beta(u, \lambda w) &= \lambda \beta(u, w) = \beta(\lambda u, w) \\ \beta(u_1 + u_2, w_1 + w_2) &= \beta(u_1, w_1) + \beta(u_1, w_2) + \beta(u_2, w_1) + \beta(u_2, w_2).\end{aligned}$$

Если на пространствах V_1 и V_2 заданы билинейные формы β_1 и β_2 , то линейное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$ называется *изометрическим* (или *гомоморфизмом билинейных форм*), если $\forall v, w \in V_1 \beta_1(v, w) = \beta_2(f(v), f(w))$. Билинейные формы β_1 и β_2 называются *изоморфными*, если между пространствами V_1 и V_2 имеется изометрический изоморфизм.

14.1.1. Матрицы Грама. Билинейные формы на V образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$. Если зафиксировать в пространстве V базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, то каждая билинейная форма β будет однозначно задаваться своими значениями $\beta_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ на всевозможных парах базисных векторов. Таблица этих значений называется *матрицей Грама* формы β . Мы будем обозначать матрицы Грама одноимёнными формам большими буквами:

$$B_e = (\beta_{ij}), \quad \text{где } \beta_{ij} = \beta(e_i, e_j).$$

Значение формы β на любой паре векторов $u = ex = \sum x_i e_i$ и $w = ey = \sum y_j e_j$ равно:

$$\beta(u, w) = \beta\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{ij} \beta_{ij} x_i y_j = x^t B y, \quad (14-1)$$

где через x^t и y обозначены, соответственно, строка и столбец координат векторов u и w в базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Поскольку нулевую матрицу Грама имеет лишь тождественно нулевая билинейная форма, и любая матрица $B = (\beta_{ij})$ размера $n \times n$ задаёт по формуле (14-1) билинейную форму β на пространстве с базисом $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, отображение $\beta \mapsto B_e$, сопоставляющее билинейной форме β её матрицу Грама в фиксированном базисе e , задаёт изоморфизм пространства билинейных форм с пространством квадратных матриц размера $n \times n$. В частности, размерность пространства билинейных форм на n -мерном векторном пространстве равна n^2 .

Более общим образом, произвольным двум наборам векторов пространства V

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \quad \text{и} \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

можно сопоставить их *взаимную матрицу Грама* $B_{uw} = (\beta(u_i, w_j))$. Если для двух векторов $a, b \in V$ положить

$$a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} \beta(a, b) \in \mathbb{k}, \quad (14-2)$$

а для двух матриц A, B , элементами которых являются векторы пространства V , обозначить через $A \cdot B$ матрицу с элементами из \mathbb{k} , вычисленную по правилам умножения матриц с использованием для перемножения векторов операции (14-2), то взаимную матрицу Грама двух наборов векторов $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ и $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ можно описать формулой $B_{uv} = u^t \cdot w$, где u^t — столбец из векторов u_1, u_2, \dots, u_k . Отметим, что

$$B_{wu} = B_{uv}^t.$$

Если наборы векторов u и w линейно выражаются через наборы векторов e и f по формулам $u = eC_{eu}$ и $w = fC_{fw}$, то матрица Грама B_{uw} выражается через матрицу Грама B_{ef} и матрицы перехода C_{eu} и C_{fw} по формуле

$$B_{uw} = u^t \cdot w = (eC_{eu})^t \cdot (fC_{fw}) = C_{eu}^t e^t \cdot fC_{fw} = C_{eu}^t B_{ef} C_{fw}. \quad (14-3)$$

В частности, если два базиса e и f пространства V связаны переходом $f = eC_{ef}$, то

$$B_f = C_{ef}^t B_e C_{ef} = (C_{fe}^{-1})^t B_e C_{fe}^{-1}. \quad (14-4)$$

Отметим, что *определитель Грама* при замене базиса умножается на ненулевой квадрат:

$$\det B_f = \det B_e \cdot \det^2 C_{ef} = \det B_e / \det^2 C_{fe}. \quad (14-5)$$

14.1.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ равносильно заданию линейного оператора

$$\beta : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(*, v), \quad (14-6)$$

переводящего вектор $v \in V$ в линейную форму $w \mapsto \beta(w, v)$. Этот оператор называется *правой корреляцией* билинейной формы β . Мы умышленно обозначили его той же буквой, что и форму.

Упражнение 14.1. Убедитесь, что матрица оператора $\beta : V \rightarrow V^*$ написанная в произвольном базисе e пространства V и двойственном базисе e^* пространства V^* , равна матрице Грама B_e формы β в базисе e .

Если обозначить через $\langle *, * \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{k}$ спаривание векторов с ковекторами², то билинейная форма восстанавливается по своей правой корреляции как

$$\beta(u, w) = \langle \beta w, u \rangle.$$

Если на пространствах V_1 и V_2 заданы билинейные формы с корреляциями β_1 и β_2 , то линейное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$ является изометрическим, если и только если

$$\beta_1 = f^* \beta_2 f, \quad (14-7)$$

т. е. когда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_1^* & \xleftarrow{f^*} & V_2^* \\ \beta_1 \uparrow & & \uparrow \beta_2 \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2, \end{array}$$

в которой $f^* : V_2^* \rightarrow V_1^*$ это двойственное к f линейное отображение³, что ещё раз объясняет матричные соотношения (14-3) и (14-4).

Упражнение 14.2. Убедитесь, что равенство (14-7) означает, что

$$\forall v, w \in V_1 \quad \beta_1(v, w) = \beta_2(f(v), f(w)).$$

¹ j -тый столбец этой матрицы образован координатами вектора $\beta(e_j)$ в базисе e^*

²см. прим. 7.5 на стр. 107

³напомню (см. п° 7.3 на стр. 109), что линейное отображение $f^* : W^* \rightarrow U^*$, двойственное к $f : U \rightarrow W$, определяется тем, что $\forall \xi \in W^* \forall u \in U \langle f^* \xi, u \rangle = \langle \xi, fu \rangle$

Двойственный к правой корреляции $\beta : V \rightarrow V^*$ оператор $\beta^* : V^{**} = V \rightarrow V$ связан с оператором β соотношением $\langle \beta^* u, w \rangle = \langle \beta w, u \rangle$, и задаёт билинейную форму

$$\beta^*(u, w) = \langle \beta^* w, u \rangle = \langle \beta u, w \rangle = \beta(w, u),$$

получающуюся из формы β перестановкой аргументов. В терминах формы β оператор

$$\beta^* : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(v, *) \quad (14-8)$$

переводит вектор $v \in V$ в линейную форму $w \mapsto \beta(v, w)$. Поэтому он называется *левой корреляцией* билинейной формы¹ β .

Упражнение 14.3. Убедитесь в том, что матрица левой корреляции в двойственных базисах e и e^* пространств V и V^* это транспонированная матрица Грама B_e^t формы β в базисе e .

Если корреляции β и β^* пропорциональны друг другу: $\beta^* = c\beta$, то $\beta(u, w) = c\beta(w, u) = c^2\beta(u, w)$, откуда при $\beta(u, w) \neq 0$ получаем $c = \pm 1$. Таким корреляциям отвечают *симметричные* формы $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ с $\beta^* = \beta$ и *кососимметричные* формы $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ с $\beta^* = -\beta$. Специальным свойствам (косо) симметричных форм будет посвящён раздел н° 14.4 ниже, отдельно симметричным формам — весь следующий §15.

14.1.3. Характеристический многочлен несимметричной формы. Будем называть формы $\beta(u, w) \neq \pm\beta(w, u)$ *несимметричными*. Каждая несимметричная билинейная форма β задаёт двумерное пространство корреляций, порождённое β и β^* и называемое *пучком корреляций* формы β . Мы обозначим его

$$\mathcal{C}_\beta = \{\lambda \cdot \beta^* + \varrho \cdot \beta : V \rightarrow V^* \mid \lambda, \varrho \in \mathbb{k}\} \subset \text{Hom}(V, V^*). \quad (14-9)$$

Можно воспринимать \mathcal{C}_β как *пучок билинейных форм* $\lambda\beta(u, w) + \mu\beta(w, u)$. На пучке \mathcal{C}_β имеется каноническая инволюция, действующая на операторы сопряжением, а на формы — перестановкой аргументов, и переставляющая друг с другом координаты (λ, ϱ) . Определитель

$$\chi_\beta(\lambda, \varrho) = \det(\lambda B_e^t + \varrho B_e) \quad (14-10)$$

называется *характеристическим многочленом* формы β . Это однородный многочлен степени $\dim V$ (возможно нулевой) от переменных (λ, ϱ) . Он *зависит* от выбора базиса e в котором пишется матрица Грама B_e . При выборе другого базиса $\varepsilon = e C_{e\varepsilon}$ получится многочлен, отличающийся от (14-10) постоянным множителем:

$$\det(\lambda B_\varepsilon^t + \varrho B_\varepsilon) = \det(\lambda C_{e\varepsilon}^t B_e^t C_{e\varepsilon} + \varrho C_{e\varepsilon} B_e C_{e\varepsilon}) = \det(\lambda B_e + \varrho B_e) \cdot \det^2 C_{e\varepsilon}$$

Будем называть несимметричную форму *регулярной*, если её характеристический многочлен (14-10) ненулевой. В этом случае его корни $\mu = \varrho : \lambda$ на проективной прямой² $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathcal{C}_\beta)$ называются *характеристическими числами* формы β . Они не зависят от выбора базиса в V . То же вычисление показывает, что изоморфные формы имеют одинаковые

¹но является при этом *правой* корреляцией для формы β^*

²включая значения $0 = 0 : 1$ и $0^{-1} = \infty = 1 : 0$, возникающие при $\det(B_e) = 0$, т. е. когда форма β вырождена, но регулярна

наборы характеристических чисел. Так как определитель не меняется при транспонировании матрицы, характеристический многочлен симметричен по λ, ϱ :

$$\chi_\beta(\lambda, \varrho) = \det(\lambda B_e^t + \varrho B_e) = \det(\lambda B_e^t + \varrho B_e)^t = \det(\lambda B_e + \varrho B_e^t) = \chi_\beta(\varrho, \lambda).$$

Поэтому вместе с каждым характеристическим числом $\mu \neq \pm 1$ обратное число μ^{-1} также является характеристическим и имеет ту же кратность, что μ . Характеристическим значениям $\lambda : \varrho$ отвечают вырожденные корреляции (14-9). Для регулярной формы β они образуют конечный набор из $\leq \dim V$ одномерных подпространств в \mathcal{C}_β . Все остальные корреляции в \mathcal{C}_β невырождены.

Упражнение 14.4. Покажите, что в пучке корреляций (14-9) есть ровно одна симметричная и ровно одна кососимметричная форма. Могут ли обе они быть вырождены, если несимметричная форма β невырождена?

14.1.4. Невырожденность билинейной формы β можно характеризовать многими способами.

Предложение 14.1 (критерии невырожденности)

Следующие условия на билинейную форму $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ с матрицей Грама B_e в некотором базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V эквивалентны:

- 1) $\det B_e \neq 0$
- 2) для любого ненулевого $u \in V \exists w \in V : \beta(u, w) \neq 0$
- 3) левая корреляция $\beta^* : V \simeq V^*$ является изоморфизмом
- 4) любой ковектор $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ представим в виде $\xi(v) = \beta(u_\xi, v)$ с $u_\xi \in V$
- 5) для любого ненулевого $w \in V \exists u \in V : \beta(u, w) \neq 0$
- 6) правая корреляция $\beta : V \simeq V^*$ является изоморфизмом
- 7) любой ковектор $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ представим в виде $\xi(v) = \beta(v, w_\xi)$ с $w_\xi \in V$.

В частности, если условие (1) выполнено для какого-то базиса e , то оно выполнено и для любого другого базиса, а векторы u_ξ и w_ξ в (4) и (7) однозначно определяются ковектором ξ (если существуют).

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, условия (2) и (4), означающие, соответственно, что $\ker \beta^* = 0$ и что $\text{im } \beta^* = V^*$, равносильны условию (3). По той же причине эквивалентны друг другу и условия (5), (6), (7). Поскольку матрицы операторов β^* и β в двойственных друг другу базисах e и e^* суть B_e^t и B_e , их невырожденность равносильна тому, что $\det B_e^t = \det B_e \neq 0$. \square

Определение 14.1

Билинейные формы β , удовлетворяющие условиям предл. 14.1 называются *невырожденными* или *неособыми*. Все остальные билинейные формы называются *вырожденными* или *особыми*.

14.1.5. **Ядра.** Если форма β вырождена, то обе её корреляции имеют ненулевые ядра

$$\ker \beta = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(v, u) = 0\} \quad \text{и} \quad \ker \beta^* = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(u, v) = 0\},$$

называемые, соответственно, *правым* и *левым* ядром билинейной формы β . Вообще говоря, это *разные* подпространства в V , однако размерность у них одинакова, поскольку операторы β^* и β сопряжены друг другу и, стало быть, имеют одинаковый ранг¹.

14.2. **Конструкции с невырожденными формами.** Если билинейная форма β невырождена, то для любого базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V прообразы векторов двойственного базиса $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ пространства V^* относительно левой и правой корреляций образуют в V два базиса ${}^\vee e = ({}^\vee e_1, {}^\vee e_2, \dots, {}^\vee e_n)$ и $e^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee)$, называемые *левым* и *правым* двойственными относительно формы β к исходному базису e , поскольку

$$\beta({}^\vee e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (14-11)$$

Они выражаются через базис e по формулам ${}^\vee e = e B_e^{-1t}$ и $e^\vee = e B_e^{-1}$. Знание двойственного базиса позволяет раскладывать произвольный вектор $v \in V$ по базису e как

$$v = \sum_{\nu} \beta({}^\vee e_\nu, v) \cdot e_\nu = \sum_{\nu} \beta(v, e_\nu^\vee) \cdot e_\nu, \quad (14-12)$$

в чём легко убедиться применив к обеим частям функционалы $\beta({}^\vee e_\nu, *)$ и $\beta(*, e_\nu^\vee)$ соответственно.

14.2.1. **Группа изометрий $O_\beta(V)$** невырожденной билинейной формы β на пространстве V определяется как множество всех операторов $g : V \rightarrow V$, сохраняющих форму β в том смысле, что

$$\forall u, w \in V \quad \beta(gu, gw) = \beta(u, w).$$

В терминах корреляций это означает равенство $g^* \beta g = \beta$, из которого вытекает, что $\det g \neq 0$. Поэтому каждая изометрия обратима, и обратный к изометрии g оператор $g^{-1} = \beta^{-1} g^* \beta$ также является изометрией.

Упражнение 14.5. Убедитесь в этом.

Так как композиции изометрий очевидно тоже являются изометриями, изометрии действительно образуют группу. В [упр. 14.8](#) ниже изометрии формы β будут охарактеризованы как операторы, сопряжённые относительно формы β к своим обратным.

14.2.2. **Биекция между формами и операторами.** Если на пространстве V задана билинейная форма $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$, то каждому линейному оператору $f : V \rightarrow V$ можно сопоставить корреляцию $\beta f : V \rightarrow V^*$ или билинейную форму $\beta f(u, w) = \beta(u, fw)$. Отображение

$$\text{End } V \rightarrow \text{Hom}(V, V^*), \quad f \mapsto \beta f, \quad (14-13)$$

линейно и является изоморфизмом, если форма β невырождена, т. к. в этом случае каждая корреляция $\psi : V \rightarrow V^*$ имеет вид $\psi = \beta f$ для единственного оператора $f = \beta^{-1} \psi$. При изоморфизме (14-13) невырожденным операторам соответствуют невырожденные формы и наоборот.

¹по-другому можно было бы сказать, что матрицы B_e^t и B_e этих операторов транспонированы друг другу, а значит, имеют равный ранг

14.2.3. Канонический оператор. Оператор $\kappa = \beta^{-1}\beta^* : V \rightarrow V$, отвечающий при изоморфизме (14-13) левой корреляции β^* , т. е. такой что

$$\forall u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \kappa w), \quad (14-14)$$

называется *каноническим оператором* формы β . Если форма β невырождена, он существует и единствен. Мы будем писать κ_β , когда надо уточнить, о какой форме β идёт речь. Матрица K оператора κ в любом базисе пространства V выражается через матрицу Грама B формы β в этом базисе по формуле $K = B^{-1}B^t$.

Упражнение 14.6. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу $B \mapsto C^t B C$ с $C \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ матрица $K = B^{-1}B^t$ меняется как $K \mapsto C^{-1}K C$.

Так как $\forall u, w \in V \quad \beta(u, w) = \beta(w, \kappa u) = \beta(\kappa u, \kappa w)$, канонический оператор является изометрическим. Характеристический многочлен канонического оператора

$$\chi_\kappa(t) = \det(tE - B^{-1}B^t) = \det^{-1}(B) \cdot \det(tB - B^t) = \det^{-1}(B) \cdot \chi_\beta(-1, t)$$

пропорционален ограничению характеристического многочлена $\chi_\beta(\lambda, \varrho) = \det(\lambda\beta^* + \varrho\beta)$ формы β на прямую $\lambda = -1$. Поэтому собственные числа канонического оператора суть характеристические числа формы β , взятые с противоположным знаком. В н° 14.2.6 ниже мы докажем такой факт:

Теорема 14.1

Над алгебраическим полем \mathbb{k} характеристики нуль две невырожденных билинейных формы на конечномерном векторном пространстве изометрически изоморфны тогда и только тогда, когда их канонические операторы подобны. \square

Доказательство теор. 14.1 использует *сопряжение* операторов невырожденной билинейной формой, часто встречающееся и во многих других задачах линейной алгебры.

14.2.4. Сопряжение операторов. На пространстве V с невырожденной билинейной формой β каждому линейному оператору $f : V \rightarrow V$ можно сопоставить *правый сопряжённый оператор* $f^\vee = \beta^{-1}f^*\beta : V \rightarrow V$, получающийся сопряжением двойственного к f оператора $f^* : V^* \rightarrow V^*$ изоморфизмом $\beta : V \simeq V^*$, т. е. включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{f^*} & V^* \\ \beta \uparrow & & \uparrow \beta \\ V & \xrightarrow{f^\vee} & V. \end{array} \quad (14-15)$$

На языке билинейных форм правый сопряжённый оператор однозначно определяется соотношением

$$\forall u, w \in V \quad \beta(fu, w) = \beta(u, f^\vee w). \quad (14-16)$$

Симметричным образом *левый сопряжённый* к f оператор ${}^\vee f = (b^*)^{-1}f^*\beta^* : V \rightarrow V$ задаётся соотношением

$$\forall u, w \in V \quad \beta({}^\vee f u, w) = \beta(u, f w) \quad (14-17)$$

и получается сопряжением двойственного к f оператора f^* левой корреляцией β^* формы β , т. е. включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{f^*} & V^* \\ \beta^* \uparrow & & \uparrow \beta^* \\ V & \xrightarrow{\vee f} & V \end{array} \quad (14-18)$$

Матрицы ${}^{\vee}F_e$ и F_e^{\vee} операторов $\vee f$ и f^{\vee} в произвольном базисе пространства V выражаются через матрицу F оператора f и матрицу Грама B формы φ по формулам

$${}^{\vee}F = (B^t)^{-1} F^t B^t \quad \text{и} \quad F^{\vee} = B^{-1} F B. \quad (14-19)$$

Упражнение 14.7. Покажите, что $\vee(f^{\vee}) = f = (\vee f)^{\vee}$.

Равенства $\beta(fgu, w) = \beta(gu, f^{\vee}w) = \beta(u, g^{\vee}f^{\vee}w)$ и $\beta(u, fgw) = \beta(\vee fu, gw) = \beta(\vee g^{\vee}fu, w)$ показывают, что левое и правое сопряжения являются по отношению к композиции операторов *антигомоморфизмами*, т. е. $(fg)^{\vee} = g^{\vee}f^{\vee}$ и $\vee(fg) = \vee g^{\vee}f$.

Упражнение 14.8. Покажите, что оператор $g : V \rightarrow V$ является изометрией невырожденной билинейной формы β , если и только если он обратим и $\vee g = g^{\vee} = g^{-1}$.

Предложение 14.2

На векторном пространстве V с невырожденной билинейной формой β следующие условия на линейный оператор $f : V \rightarrow V$ эквивалентны друг другу:

$$1) f^{\vee\vee} = f \quad 2) \vee\vee f = f \quad 3) \vee f = f^{\vee} \quad 4) \kappa f = f \kappa.$$

Доказательство. Беря в (3) правые сопряжённые, мы по [упр. 14.7](#) получаем (1), а беря в (1) левые сопряжённые, получаем (3). Поэтому (1) \Leftrightarrow (3) и, аналогично, (2) \Leftrightarrow (3). Далее, (3) $\Leftrightarrow (b^*)^{-1} f^* \beta^* = \beta^{-1} f^* \beta \Leftrightarrow \beta (b^*)^{-1} f^* = f^* \beta (b^*)^{-1} \Leftrightarrow f \beta^{-1} \beta^* = \beta^{-1} \beta^* f \Leftrightarrow$ (4). \square

14.2.5. Рефлексивные операторы. Мы будем называть операторы $f : V \rightarrow V$, удовлетворяющие условиям [предл. 14.2](#), *рефлексивными* относительно формы β . Рефлексивные операторы образуют в $\text{End}(V)$ подалгебру — централизатор канонического оператора κ_{β} . Рефлексивный оператор f называется *самосопряжённым*, если $f^{\vee} = f$, и *антисамосопряжённым* — если $f^{\vee} = -f$. Всякий рефлексивный оператор является суммой самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов: $f = (f + f^{\vee})/2 + (f - f^{\vee})/2$.

Предложение 14.3

Невырожденные формы α и β на пространстве V тогда и только тогда имеют равные канонические операторы $\kappa_{\alpha} = \kappa_{\beta}$, когда $\alpha = \beta f$ для некоторого самосопряжённого относительно обеих форм невырожденного линейного оператора¹ $f : V \rightarrow V$.

Доказательство. Если канонические операторы совпадают $\beta^{-1}\beta^* = \alpha^{-1}\alpha^*$, то совпадают и двойственные к ним: $\beta (\beta^*)^{-1} = \alpha (\alpha^*)^{-1}$. Тогда оператор $f = \beta^{-1}\alpha = (\beta^*)^{-1} \alpha^*$ перестановочен с $\kappa_{\alpha} = \kappa_{\beta}$, ибо $f \kappa_{\alpha} = \beta^{-1}\alpha^* = \kappa_{\beta} f$, и удовлетворяет равенству $\alpha = \beta f$. Наоборот, если $\alpha = \beta f$ и f самосопряжён относительно β , т. е. $f = f^{\vee} = \beta^{-1}f^*\beta$, то $\kappa_{\alpha} = \alpha^{-1}\alpha^* = f^{-1}\beta^{-1}f^*\beta^* = f^{-1}f^{\vee}\beta^{-1}\beta^* = \beta^{-1}\beta^* = \kappa_{\beta}$. \square

¹т. е. $\forall u, w \in V \alpha(u, w) = \beta(u, fw)$, см. [п. 14.2.2](#) на стр. 218

14.2.6. Доказательство теор. 14.1. Если $\alpha = g^* \beta g$ для некоторого линейного изоморфизма $g : V \simeq V$, то $\kappa_\alpha = \alpha^{-1} \alpha^* = g^{-1} \beta^{-1} \beta^* g = g^{-1} \kappa_\beta g$. Наоборот, пусть α и β имеют подобные канонические операторы $\kappa_\alpha = g^{-1} \kappa_\beta g$. Заменяя β изоморфной корреляцией $g^* \beta g$, мы можем и будем считать, что $\kappa_b = \kappa_\alpha$. Тогда по предл. 14.3 $\alpha(u, w) = \beta(u, fw)$ для некоторого невырожденного линейного оператора $f : V \simeq V$, самосопряжённого относительно формы β . Согласно лем. 14.1, которую мы докажем ниже, можно подобрать такой многочлен $p(x) \in \mathbb{k}[x]$, что оператор $h = p(f)$ имеет $h^2 = f$. Оператор h тоже самосопряжён относительно β , поскольку $h^\vee = p(f)^\vee = p(f^\vee) = p(f) = h$, и переводит форму b в форму α , так как $\alpha(u, w) = \beta(u, fw) = \beta(u, h^2 w) = \beta(hu, hw)$. Это доказывает теор. 14.1.

Лемма 14.1

Над алгебраическим полем \mathbb{k} характеристики нуль для любого оператора f с нулевым ядром, действующего на конечномерном векторном пространстве, существует такой многочлен $p(x) \in \mathbb{k}[x]$, что $p(f)^2 = f$.

Доказательство. Можно считать, что f является оператором умножения на t в прямой сумме фактор колец вида $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda)^m$ с $\lambda \neq 0$. Обозначим через m_λ максимальный из показателей элементарных делителей оператора f вида $(t - \lambda)^m$ с данным $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Полагая $s = t - \lambda$ и беря первые m_λ членов формального биномиального разложения¹

$$\sqrt{t} = \sqrt{\lambda + s} = \lambda^{1/2} \cdot \sqrt{1 + \lambda^{-1/2} s} = \lambda^{1/2} + \frac{1}{2} s - \frac{\lambda^{-1/2}}{8} s^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16} s^3 - \dots,$$

где $\lambda^{1/2} \in \mathbb{k}$ — один из двух корней уравнения $x^2 = \lambda$, получаем в правой части такой многочлен $p_\lambda(t)$, что $p_\lambda^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$. По китайской теореме об остатках из многочленов $p_\lambda(t)$ можно изготовить один многочлен $p(t)$, такой что сравнения

$$p^2 \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$$

будут выполнены одновременно для всех $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Тем самым, $p^2(f) = f$. \square

Замечание 14.1. Над алгебраически незамкнутыми полями теор. 14.1 неверна. Так, над полем \mathbb{Q} имеется огромное число неизоморфных невырожденных форм с тождественным каноническим оператором², и полное их перечисление выглядит необозримой задачей. В следующем параграфе мы опишем классы изоморфных симметричных билинейных форм над полем \mathbb{R} и над простыми конечными полями \mathbb{F}_p , а также дадим более геометрическое доказательство тому, что над алгебраически замкнутым полем в каждой размерности имеется единственная с точностью до изоморфизма невырожденная симметричная билинейная форма. С кососимметричными формами, для которых $\kappa = -\text{Id}_V$, дела обстоят намного проще, и в н° 14.5 ниже мы покажем, что над любым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ в каждой чётной размерности имеется единственная с точностью до изоморфизма невырожденная кососимметричная форма, а в нечётных размерностях невырожденных кососимметричных форм не существует.

¹см. формулу (4-23) на стр. 59

²т. е. невырожденных симметричных билинейных форм

14.3. Ортогоналы и ортогональные проекции. Для подпространства U в векторном пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ обозначим через

$${}^{\perp}U = \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\}, \quad (14-20)$$

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\} \quad (14-21)$$

левый и правый ортогоналы к U . Вообще говоря, это *разные* подпространства в V .

Предложение 14.4

Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \text{и} \quad ({}^{\perp}U)^{\perp} = U = {}^{\perp}(U^{\perp}).$$

Доказательство. Первые два равенства вытекают из того, что левый и правый ортогоналы (14-20) и (14-21) являются прообразами подпространства $\text{Ann } U \subset V^*$ при изоморфизмах $\beta^* : V \simeq V^*$ и $\beta : V \simeq V^*$, задаваемых левой и правой корреляциями (??) формы β , и того, что $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$ по предл. 7.2 на стр. 107. Вторые два равенства верны, поскольку U содержится в подпространствах $({}^{\perp}U)^{\perp}$ и ${}^{\perp}(U^{\perp})$, а их размерность по предыдущему равна $\dim U$. \square

Предложение 14.5

Если ограничение формы β на конечномерное подпространство $U \subset V$ невырождено, то $V = U^{\perp} \oplus U$ и для каждого вектора $v \in V$ его проекция ${}_U v$ на U вдоль U^{\perp} однозначно определяется тем, что $\forall u \in U \beta(u, v) = \beta(u, {}_U v)$. Она вычисляется в терминах любой пары двойственных относительно формы β базисов пространства U по формуле

$${}_U v = \sum_i \beta({}^{\vee}u_i, v) \cdot u_i.$$

Симметричным образом, имеется прямое разложение $V = U \oplus {}^{\perp}U$ в котором проекция ${}_U v$ вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^{\perp}U$ однозначно определяются тем, что

$$\forall u \in U \quad \beta(v, u) = \beta({}_U v, u),$$

и вычисляется в терминах любой пары двойственных относительно формы β базисов пространства U по формуле ${}_U v = \sum \beta(v, {}^{\vee}u_i) \cdot u_i$.

Доказательство. Коль скоро ограничение формы β на U невырождено, для любого $v \in V$ линейная форма $\beta(v) : u \mapsto \beta(u, v)$ на подпространстве U имеет вид скалярного умножения справа на некоторый вектор $v_U \in U$, который однозначно определяется по v . Тем самым, $\forall u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$, равносильное равенству $\beta(u, v - v_U) = 0$, и любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение

$$v = (v - v_U) + v_U, \quad \text{где} \quad v_U \in U \quad \text{и} \quad v - v_U \in U^{\perp}.$$

Стало быть, $V = U^{\perp} \oplus U$. Поскольку $\beta({}^{\vee}u_i, v) = \beta({}^{\vee}u_i, v_U)$, разложение (14-12) имеет для вектора v_U вид $v_U = \sum \beta({}^{\vee}u_i, v_U) \cdot u_i = \sum \beta({}^{\vee}u_i, v) \cdot u_i$. Доказательства для левого ортогонала полностью симметричны. \square

Упражнение 14.9. В условиях [предл. 14.5](#) убедитесь, что отображения $V \rightarrow U$, заданные правилами $v \mapsto {}_U v$ и $v \mapsto v_U$, а также отображения $V \rightarrow {}^\perp U$ и $V \rightarrow U^\perp$, заданные правилами $v \mapsto v - {}_U v$ и $v \mapsto v - v_U$, линейны и сюръективны (здесь и далее ${}_U v$ и v_U означают проекции вектора v на U вдоль ${}^\perp U$ и U^\perp соответственно).

Следствие 14.1

Если и сама билинейная форма β на конечномерном пространстве V и её ограничение на подпространство $U \subset V$ оба невырождены, то и ограничения формы β на левый и на правый ортогоналы ${}^\perp U$ и U^\perp к подпространству U также невырождены, а проекции

$$v_{\perp U} \stackrel{\text{def}}{=} v - v_U \quad \text{и} \quad {}_{U^\perp} v \stackrel{\text{def}}{=} v - {}_U v$$

произвольного вектора $v \in V$ на ${}^\perp U$ и на U^\perp вдоль U в прямых разложениях

$$U \oplus {}^\perp U = V = U^\perp \oplus U$$

однозначно определяются свойствами

$$\forall w \in {}^\perp U \quad \beta(w, v) = \beta(w, v_{\perp U}) \quad \text{и} \quad \forall w \in U^\perp \quad \beta(v, w) = \beta({}_{U^\perp} v, w).$$

Доказательство. Для любого вектора $w \in U^\perp$ найдётся вектор $v \in V$ с $\beta(v, w) \neq 0$. Раскладывая его как $v = {}_U v + {}_{U^\perp} v$, где ${}_U v \in U$, ${}_{U^\perp} v = v - {}_U v \in U^\perp$, и пользуясь равенством $\beta({}_U v, w) = 0$, заключаем, что $\beta({}_{U^\perp} v, w) = \beta(v, w) \neq 0$. Стало быть, ограничение формы β на U^\perp невырождено. То же вычисление показывает, что $\beta(v, w) = \beta({}_{U^\perp} v, w)$ для всех $w \in U^\perp$, откуда по [предл. 14.5](#), применённой к подпространству U^\perp в качестве U , мы заключаем, что ${}_{U^\perp} v$ является проекцией v на U^\perp вдоль ${}^\perp(U^\perp) = U$ в прямом разложении $V = {}^\perp(U^\perp) \oplus U^\perp = U \oplus U^\perp$. Утверждения про левый ортогонал проверяются симметричным образом. \square

Следствие 14.2

В условиях предыдущего [сл. 14.1](#) ограничение на подпространство ${}^\perp U \subset V$ проекции пространства V на U^\perp вдоль U и ограничение на подпространство $U^\perp \subset V$ проекции пространства V на ${}^\perp U$ вдоль U являются взаимно обратными изометрическими изоморфизмами между левым и правым ортогоналами к U . Эти изоморфизмы переводят друг в друга проекции $v_{\perp U}$ и ${}_{U^\perp} v$ любого вектора $v \in V$ на ${}^\perp U$ и на U^\perp вдоль U .

Доказательство. Линейный оператор $U^\perp \rightarrow {}^\perp U$, заданный правилом $w \mapsto w_{\perp U} = w - w_U$, изометричен, т. к. для любых двух векторов $w', w'' \in U^\perp$

$$\beta(w' - w'_U, w'' - w''_U) = \beta(w', w'') - \beta(w', w''_U) + \beta(w'_U, w''_U) = \beta(w', w'')$$

в силу равенств $\beta(w'_U, w'') = 0$ и $\beta(w', w''_U) = \beta(w'_U, w''_U)$, первое из которых выполняется, поскольку $w'_U \in U$, а $w'' \in U^\perp$, а второе — поскольку $\beta(w', u) = \beta(w'_U, u)$ для всех u из U , включая $u = w''_U$. Изометричность оператора ${}^\perp U \rightarrow U^\perp$ устанавливается аналогично. Поскольку обе проекции $v \mapsto {}_U v$ и $v \mapsto v_U$ тождественно действуют на U , для любого вектора $v \in V$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} ({}_{U^\perp} v)_{\perp U} &= (v - {}_U v) - (v - {}_U v)_U = v - {}_U v - v_U + {}_U v = v - v_U = v_{\perp U}, \\ {}_{U^\perp}(v_{\perp U}) &= (v - v_U) - {}_U(v - v_U) = v - v_U - {}_U v + v_U = v - {}_U v = {}_{U^\perp} v, \end{aligned}$$

из которых вытекают все остальные утверждения доказываемого следствия. \square

14.4. (Косо)симметричные формы. Билинейная форма β на пространстве V называется *симметричной*, если $\forall v, w \in V \beta(v, w) = \beta(w, v)$, т. е. $\kappa_\beta = \text{Id}_V$ и $\beta^* = \beta$. Форма β называется *кососимметричной*, если $\forall v, w \in V \beta(v, w) = -\beta(w, v)$, т. е. $\kappa_\beta = -\text{Id}_V$ и $\beta^* = -\beta$.

Упражнение 14.10. Покажите, что если $\forall v \in V \beta(v, v) = 0$, то форма β кососимметрична, а при $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ верно и обратное.

На языке матриц (косо) симметричность формы означает (косо) симметричность её матрицы Грама в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе. Произвольная билинейная форма β однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной:

$$\beta(v, w) = \beta_+(v, w) + \beta_-(v, w), \quad \text{где}$$

$$\beta_+(v, w) = (\beta(v, w) + \beta(w, v))/2, \quad \beta_-(v, w) = (\beta(v, w) - \beta(w, v))/2,$$

т. е. пространство билинейных форм на V является прямой суммой подпространств симметричных и кососимметричных форм или, эквивалентно,

$$\text{Hom}(V, V^*) = \text{Hom}_+(V, V^*) \oplus \text{Hom}_-(V, V^*)$$

является прямой суммой собственных подпространств, отвечающих собственным числам $+1$ и -1 инволютивного оператора дуализации $*$: $\beta \rightarrow \beta^*$.

Упражнение 14.11. Вычислите $\dim \text{Hom}_\pm(V, V^*)$ при $\dim V = n$.

14.4.1. Ядро (косо) симметричной формы. Левое и правое ядра (косо) симметричной формы β совпадают друг с другом. Это подпространство называется просто *ядром* формы β и обозначается $\ker \beta = {}^\perp V = V^\perp = \{w \in V \mid \forall v \in V \beta(w, v) = \pm\beta(v, w) = 0\}$.

Предложение 14.6

Ограничение (косо) симметричной формы β на любое дополнительное к её ядру подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть $U \subset V$ таково, что $V = \ker \beta \oplus U$. Если $w \in U$ удовлетворяет для всех $u \in U$ соотношению $\beta(w, u) = 0$, то записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$ с $e \in \ker \beta$, $u \in U$ мы получим $\beta(w, v) = \beta(w, e) + \beta(w, u) = 0$, откуда $w \in U \cap \ker \beta^* = U \cap \ker \beta = 0$. \square

Предостережение 14.1. Для несимметричной билинейной формы [предл. 14.6](#), вообще говоря, неверно. А именно, рассуждение из доказательства [предл. 14.6](#) показывает, что вектор w , лежащий в дополнительном к $\ker \beta = V^\perp$ подпространстве U ортогонален этому подпространству *слева*, если и только если он ортогонален слева всему V , т. е. лежит в ${}^\perp V = \ker \beta^*$. Иными словами, $V = U \oplus V^\perp \Rightarrow {}^\perp U \cap U = {}^\perp V \cap U$.

Упражнение 14.12. Приведите пример билинейной формы $\beta : V \rightarrow V^*$ и такого подпространства $U \subset V$, что $V = U \oplus \ker \beta$ и $U \cap \ker \beta^* \neq 0$.

14.4.2. Сопряжение операторов. Поскольку канонический оператор $\varkappa = \pm \text{Id}_V$ невырожденной (косо) симметричной формы лежит в центре алгебры $\text{End } V$, все операторы $f : V \rightarrow V$ рефлексивны. В частности, левый и правый сопряжённые к любому оператору f совпадают друг с другом: $f^\vee = \beta^{-1} f^* \beta = (\beta^*)^{-1} f^* \beta^* = {}^\vee f$ и определяются эквивалентными друг другу соотношениями $\beta(fu, w) = \beta(u, f^\vee w)$ и $\beta(f^\vee u, w) = \beta(u, fw)$, а дважды сопряжённый оператор совпадает с исходным: $f^{\vee\vee} = f$. Самосопряжённые и антисамосопряжённые операторы определяются, соответственно, равенствами

$$\beta(fu, w) = \beta(u, fw) \quad \text{и} \quad \beta(fu, w) = -\beta(u, fw) \quad (\forall u, w \in V)$$

и являются собственными векторами с собственными значениями ± 1 инволюции

$$\vee : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V), \quad f \mapsto f^\vee$$

сопряжения относительно формы β . Согласно [прим. 11.1](#) на стр. 169 пространство $\text{End}(V)$ является прямой суммой собственных ± 1 -подпространств этой инволюции, т. е. каждый оператор $f : V \rightarrow V$ однозначно представляется в виде суммы самосопряжённого и антисамосопряжённого: $f = (f + f^\vee)/2 + (f - f^\vee)/2$.

14.4.3. Ортогоналы и проекции. Если форма β на V (косо) симметрична, то левый ортогонал к любому подпространству $U \subset V$ совпадает с правым:

$${}^\perp U = U^\perp = \{w \in V \mid \beta(w, u) = \pm \beta(u, w) = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

Если ограничение (косо) симметричной формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено, то по [сл. 14.1](#) $V = U \oplus U^\perp$. Подпространство U^\perp называется в этом случае *ортогональным дополнением* к подпространству U . Проекция $v_U = {}_U v$ вектора $v \in V$ на U вдоль U^\perp называется *ортогональной проекцией* на U и однозначно определяется тем, что

$$\forall u \in U \quad \beta(u, v) = \beta(u, v_U).$$

Если форма β невырождена на всём V , то согласно [предл. 14.5](#) $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $U^{\perp\perp} = U$ для всех подпространств $U \subset V$. Если при этом ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ также невырождено, то по [сл. 14.1](#) невырождено и ограничение формы на U^\perp . Отметим, однако, что ограничение невырожденной (косо) симметричной формы на подпространство вполне может оказаться вырожденным и даже тождественно нулевым.

14.4.4. Изотропные подпространства. Подпространства $U \subset V$, на которые форма β ограничивается в тождественно нулевую форму, называются *изотропными подпространствами* формы β . Например, любое одномерное подпространство изотропно для любой кососимметричной формы (если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$).

Предложение 14.7

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не может превосходить $\dim V/2$.

Доказательство. Изотропность подпространства $U \subset V$ означает, что корреляция $V \simeq V^*$ отображает U внутрь $\text{Ann } U \subset V^*$. Поскольку корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$, откуда $2 \dim U \leq \dim V$. \square

Всюду далее мы предполагаем, что $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$.

14.5. Симплектические пространства. Прямая сумма $W = U^* \oplus U$, наделённая кососимметричной билинейной формой

$$\omega((\xi_1, u_1), (\xi_2, u_2)) = \langle \xi_1, u_2 \rangle - \langle \xi_2, u_1 \rangle, \quad (14-22)$$

называется *симплектическим пространством* и обозначается Ω_{2n} , где $n = \dim U$. В базисе, составленном из векторов $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*, e_1, e_2, \dots, e_n$ каких-нибудь двойственных друг другу базисов в U^* и в U , матрица Грама формы ω имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \quad (14-23)$$

Матрица J называется *симплектической единицей* и удовлетворяет соотношениям $J^2 = -E$, $\det J = 1$. В частности, форма ω невырождена. Базис, в котором матрица Грама невырожденной кососимметричной формы имеет вид (14-23), называется *симплектическим базисом* этой формы.

Упражнение 14.13. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \oplus \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

Теорема 14.2

Над произвольным полем \mathbb{k} любое пространство V с невырожденной кососимметричной формой ω изометрически изоморфно симплектическому пространству. В частности, размерность $\dim V$ чётна.

Доказательство. В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Поскольку ω невырождена, существует $w \in V$, такой что $\omega(e_1, w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = w/a$. Матрица Грама ограничения ω на двумерное подпространство $U \subset V$, порождённое векторами e_1, e_2 , равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, $\omega|_U$ невырождена, $V = U \oplus U^\perp$, ограничение $\omega|_{U^\perp}$ также невырождено, и мы можем воспользоваться индукцией по размерности. \square

Упражнение 14.14. Убедитесь непосредственно, что определитель кососимметричной квадратной матрицы нечётного размера равен нулю.

14.5.1. Симплектическая группа $\mathrm{Sp}_\omega(W)$. Изометрические линейные преобразования $F : W \rightarrow W$ невырожденной кососимметричной формы ω на $2n$ -мерном пространстве W называются *симплектическими* и образуют группу $\mathrm{Sp}_\omega(W)$, называемую *симплектической группой* формы ω . Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу $\mathrm{Sp}_\omega(W)$ на *группу симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{k}) = \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{k}) \mid F^t \cdot J \cdot F = J\}.$$

Если в соответствии с разложением $W = U^* \oplus U$, заданным выбором симплектического базиса, записать матрицу оператора F в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

с $A : U^* \rightarrow U^*$, $B : U \rightarrow U^*$, $C : U^* \rightarrow U$, $D : U \rightarrow U$, то условие $F^t \cdot J \cdot F = J$ запишется как

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Упражнение 14.15. Проверьте, что это равенство равносильно соотношениям:

$$C^t A = A^t C, \quad D^t B = B^t D, \quad E + C^t B = A^t D.$$

Из этих равенств видно, что полная линейная группа $GL(U)$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $Sp_\omega(U^* \oplus U)$ по правилу

$$GL(U) \ni G \mapsto \begin{pmatrix} (G^t)^{-1} & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \in Sp_\omega(U^* \oplus U).$$

14.5.2. Лагранжевы и симплектические подпространства. Изотропные подпространства максимальной размерности n в $2n$ -мерном симплектическом пространстве V с формой ω называются *лагранжевыми*.

Упражнение 14.16. Покажите, что каждое изотропное подпространство симплектической формы содержится в некотором лагранжевом, а каждое лагранжево подпространство совпадает со своим ортогоналом.

Предложение 14.8

Каждое изотропное подпространство U невырожденной кососимметричной формы ω содержится в некотором симплектическом подпространстве W размерности $\dim W = 2 \dim U$, и любой базис в U дополняется до симплектического базиса в W .

Доказательство. Выберем в U базис u_1, u_2, \dots, u_m , дополним его до базиса в V и рассмотрим двойственный к нему относительно ω базис. Первые m векторов $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$ двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (14-24)$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов u_j^\vee любой линейной комбинации векторов u_i . Заменяя каждый вектор u_j^\vee вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{v < j} \omega(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v, \quad (14-25)$$

получаем набор векторов w_1, w_2, \dots, w_m , также удовлетворяющий равенствам (14-24), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех i, j

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0.$$

Таким образом, векторы u_i и w_j с $1 \leq i, j \leq m$ составляют симплектический базис своей линейной оболочки. \square

Следствие 14.3 (из доказательства предл. 14.8)

Для каждого лагранжева подпространства $L \subset V$ имеется дополнительное лагранжево подпространство $L' \subset V$, такое что $V = L \oplus L'$. Каждый базис e подпространства L однозначно достраивается некоторым базисом e' подпространства L' до симплектического базиса пространства V . При фиксированном L' все дополнительные к L лагранжевы подпространства L'' биективно соответствуют антисамосопряженным¹ относительно формы ω линейным операторам $f : L \rightarrow L'$.

Доказательство. Беря в предыдущем доказательстве $U = L$ и $u = e$ получаем разложение $W = V = L \oplus L'$, в котором лагранжево подпространство L' натянута на векторы w_j из формулы (14-25). Корреляция $\omega : v \mapsto \omega(*, v)$ задаёт изоморфизм подпространства L' с пространством L^* и базис w в L' , дополняющий базис e пространства L до симплектического базиса в V , однозначно описывается как прообраз двойственного к e базиса e^* в L^* при этом изоморфизме. Всякое дополнительное к L подпространство $L'' \subset L \oplus L'$ биективно проектируется на L вдоль L' , т. е. для любого $u \in L$ существует единственный вектор $f(u) \in L'$, такой что $u + f(u) \in L''$. Правило $u \mapsto f(u)$ задаёт линейное отображение $f : L \rightarrow L'$, графиком которого является L'' . Изотропность подпространства L'' равносильна антисамосопряжённости оператора f , поскольку $\omega(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)) = \omega(u_1, f(u_2)) + \omega(f(u_1), u_2)$ в силу лагранжевости подпространств $L \ni u_1, u_2$ и $L' \ni f(u_1), f(u_2)$. \square

Упражнение 14.17. Покажите, что симплектическая группа $\text{Sp}_\omega(V)$ транзитивно действует на множестве всех симплектических подпространств $W \subset V$ каждой фиксированной размерности $\dim W = 2d$ и на множестве всех изотропных подпространств $U \subset V$ каждой фиксированной размерности² $\dim U = d$.

14.5.3. **Пфаффиан.** Рассмотрим имеющие $i < j$ элементы a_{ij} кососимметричной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $(2n) \times (2n)$ как независимые переменные и обозначим через $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кольцо многочленов от этих переменных с целыми коэффициентами. В этом разделе мы покажем, что существует единственный многочлен $\text{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, такой что

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A) \quad \text{и} \quad \text{Pf}(J') = 1,$$

где J' — блочно диагональная матрица, составленная из 2×2 -блоков $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Этот многочлен называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы A и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \quad (14-26)$$

где суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ в объединение n непересекающихся пар $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок которых не существен, а sgn означает знак соответствующей перестановки³.

Упражнение 14.18. Проверьте, что $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$, для кососимметричных матриц A размеров 2×2 и 4×4 .

¹т. е. таким операторам f , что $\forall u, w \omega(fu, w) + \omega(u, fw) = 0$

²в обоих случаях $1 \leq d \leq \dim V / 2$

³убедитесь, что правая часть не меняется ни при перестановках пар друг с другом, ни при перестановке элементов в каждой паре

Чтобы установить существование пфаффиана, проинтерпретируем A как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы на координатном векторном пространстве K^{2n} над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с коэффициентами в \mathbb{Q} . По теор. 14.2 эта форма обладает симплектическим базисом. Перегруппировывая его векторы по парам $e_1^*, e_1, e_2^*, e_2, \dots, e_n^*, e_n$, получаем базис с матрицей Грама J' . Тем самым, $A = C \cdot J' \cdot C^t$ для некоторой матрицы $C \in \text{GL}_{2n}(K)$. Поскольку $\det J' = 1$,

$$\det(A) = \det(C)^2.$$

Дабы удостовериться, что $\det C = \text{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, введём для кососимметричной матрицы $B = (b_{ij})$, элементы которой также рассматриваются как независимые переменные, вспомогательный однородный грасманов многочлен второй степени

$$\beta_B(\xi) = (\xi B) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij} \xi_i \wedge \xi_j$$

от n переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[b_{ij}]$. Так как чётные мономы $\xi_i \wedge \xi_j$ перестановочны, $\beta_B^n = \beta_B \wedge \beta_B \wedge \dots \wedge \beta_B = n! \cdot \text{Pf}(B) \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}$, где

$$\text{Pf}(B) = \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) \cdot b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \dots b_{i_n j_n} \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$$

тот же, что и формуле (14-26). При линейной замене координат ξ по формуле $\xi = \eta C$, где $C \in \text{GL}_{2n}(K)$ — интересующая нас матрица, грасманов многочлен $\beta_B(\xi)$ переписывается с коэффициентами в кольце $K[b_{ij}]$ как

$$\beta_B(\xi) = (\xi B) \wedge \xi^t = (\eta C B) \wedge (\eta C)^t = (\eta C B C^t) \wedge \eta^t = \beta_{C B C^t}(\eta)$$

а его n -тая внешняя степень — как $\beta_{C B C^t}(\eta)^n = n! \cdot \text{Pf}(C B C^t) \cdot \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Поскольку $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \det C \cdot \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$, многочлены $\text{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$ и $\text{Pf}(C B C^t) \in K[b_{ij}]$ связаны в кольце $K[b_{ij}] \supset \mathbb{Z}[b_{ij}]$ соотношением $\text{Pf}(C B C^t) = \text{Pf}(B) \cdot \det C$. Полагая в нём $B = J'$, получаем равенство $\text{Pf}(A) = \det C$ в поле $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$. Поэтому $\det(C) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$ и $\det(A) = \det^2(C) = \text{Pf}^2(A)$, что доказывает существование пфаффиана и формулу (14-26). Единственность пфаффиана вытекает из того, что многочлен

$$x^2 - \det A = (x - \text{Pf}(A))(x + \text{Pf}(A)) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$$

имеет в целостном кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ ровно два корня $x = \pm \text{Pf}(A)$, а требование $\text{Pf}(J') = 1$ однозначно фиксирует знак.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 14.2. Равенство форм $\beta_1(u, w) = \beta_2(fu, fw)$ на языке корреляций означает

$$\langle \beta_1 w, u \rangle = \langle \beta_2 fw, fu \rangle = \langle f^* \beta_2 fw, u \rangle.$$

Упр. 14.4. Всякая корреляция *единственным* образом раскладывается в сумму симметричной и кососимметричной: $\beta = (\beta + \beta^*)/2 + (\beta - \beta^*)/2$. Оба слагаемых лежат в пучке \mathcal{C}_β .
 Ответ на второй вопрос — да, например

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Упр. 14.7. $\vee(f^\vee) = (\beta^*)^{-1} ((\beta)^{-1} f^* \beta)^* \beta^* = f^{**} = f$.

Упр. 14.8. Условие $\forall u, w \in V \beta(u, w) = \beta(gu, gw)$ равносильно равенству $g^* \beta g = \beta$, которое влечёт $\det g \neq 0$ и эквивалентно равенству $\beta^{-1} g^* \beta = g^{-1}$. Переходя к двойственным операторам, получаем равенство $\gamma^* \beta^* g = \beta^*$, равносильное равенству $(\beta^*)^{-1} g^* \beta^* = g^{-1}$.

Упр. 14.10. Первое следует из равенства $\beta(v+w, v+w) = \beta(v, v) + \beta(w, w) + \beta(v, w) + \beta(w, v)$, второе — из равенства $\beta(v, v) = -\beta(v, v)$.

Упр. 14.11. Это размерности пространств симметричных и кососимметричных матриц размера $n \times n$, равные $n(n \pm 1)/2$.

Упр. 14.14. $\det \omega = \det(-\omega^t) = (-1)^{\dim V} \det \omega^t = (-1)^{\dim V} \det \omega$.