

Программа обязательного годового курса
«Алгебра – 1»
(НМУ, первый курс)

1-й семестр (14 – 15) недель

Тема 1 (комбинаторика конечных множеств¹). Число инъективных, сюръективных, взаимно однозначных, строго и нестрого монотонных и т. п. отображений из одного конечного (упорядоченного) множества в другое. Мультиномиальные коэффициенты. Разбиения и диаграммы Юнга.

Тема 2 (поля и коммутативные кольца, 2 недели). Поле \mathbb{C} . Поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, простое подполе, характеристика. Поля вида $\mathbb{k}[x]/(f)$, присоединение корня. Конечные поля. Примеры колец и гомоморфизмов: кольца функций, многочлены и формальные ряды, гомоморфизмы поднятия и вычисления, гомоморфизм Фробениуса. Идеалы и фактор-кольца. Простые и максимальные идеалы. Поля и кольца частных.

Тема 3 (многочлены и ряды, 2 недели). Корни, теорема Виета, кратные корни и общие корни пары многочленов. Исчисление формальных рядов: обращение, замена переменной, производные, первообразные, экспонента, логарифм, бином (с произвольным показателем). Симметрические многочлены, мономиальные, полные, элементарные и Ньютоновские многочлены и переходы между ними.

Тема 4 (делимость, 1 – 2 недели). Алгоритм Евклида в \mathbb{Z} , $\mathbb{k}[x]$, $\mathbb{Z}[i]$ и $\mathbb{Z}[\omega]$. Евклидовы кольца являются кольцами главных идеалов. Взаимная простота, китайская теорема об остатках. Простые и неприводимые элементы, факториальность, н.о.д., лемма Гаусса, кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально. Факториальность колец $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Тема 5 (векторные пространства², 2 – 3 недели). Определения и примеры векторных пространств. Линейная зависимость, линейные оболочки, базисы, размерность, координаты. Линейные преобразования. Матричный формализм. Системы линейных уравнений, двойственность.

Тема 6 (определители и грассмановы многочлены³, 1 – 2 недели). Ориентированный объём. Знак перестановки. Полилинейные косые формы. Определители. Грассмановы многочлены: базисные мономы, правила коммутирования, центр грассмановой алгебры. Линейная замена переменных в грассмановом многочлене: миноры и соотношения Сильвестра. Симплектический базис грассмановой квадратичной формы. Формулы Сильвестра для результата и дискриминанта.

Тема 7 (линейные операторы, 2 недели). Ядро, образ, двойственность, соотношения на размерности. Собственных числа и собственные векторы, характеристический многочлен, линейная независимость собственных векторов с разными собственными значениями. Аннулирующий многочлен оператора, связь между разложением пространства в прямую сумму инвариантных подпространств и разложением аннулирующего многочлена на множители.

Тема 8 (модули, 1 неделя). Модуль над коммутативным кольцом. Образующие: контрпримеры к теоремам о базисе и существованию дополнительного подмодуля. Свободные модули, ранг свободного модуля. Линейные отображения и матричный формализм, алгебра матриц, тождество Гамильтона-Кэли.

¹эти сюжеты будут представлены преимущественно в задачах

²этот сюжет тесно перекликается с курсом геометрии, и весьма желательно, чтобы первое знакомство с ним было именно в курсе геометрии (соответственно, время, которое ему надлежит уделить, тоже от этого зависит)

³сказанное в предыдущей сноске в равной мере относится и к этой теме

Тема 9 (элементарные делители, 2 недели¹). Метод Гаусса над кольцом главных идеалов: элементарные преобразования матриц и элементарные замены базисов, диагонализация матрицы элементарными преобразованиями строк и столбцов. Строение конечно порождённых модулей над кольцами главных идеалов: взаимные базисы модуля и подмодуля, элементарные делители и инвариантные множители, разложение модуля в сумму свободного и циклических. Строение конечно порождённых абелевых групп. Число элементов в факторе решётки по подрешётке. Разложение Жордана линейного оператора, цикловой тип нильпотентного оператора, функции от операторов.

2-й семестр (11 – 12) неделя

Тема 10 (группы², 2 – 3 недели). Группы преобразований и абстрактные группы. Примеры и свойства гомоморфизмов. Действие группы на множестве, длины орбит. Регулярное представление, смежные классы. Внутренние автоморфизмы, классы сопряжённости, нормальные подгруппы, фактор группы. Прямые и полупрямые произведения. p -группы и теоремы Силова.

Тема 11 (пространства с билинейной формой³, 2 – 3 недели). Соответствие между квадратичными формами $V \rightarrow \mathbb{k}$, симметричными билинейными формами $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ и самосопряжёнными операторами $V \rightarrow V^*$. невырожденные формы, ортогональное дополнение и ортогональное проектирование. Ортогональная группа порождается отражениями. Ортогональное разложение невырожденной формы в прямую сумму анизотропной и гиперболической. Канонический вид вещественных квадратичных форм и евклидовых изометрий, индекс инерции, диагонализация самосопряжённых операторов. Симплектические пространства и симплектические операторы.

Тема 12 (эрмитовы пространства⁴, 2 недели). Эрмитова геометрия, длины, углы, объём, ортогональное проектирование, унитарная группа. Ортогональная диагонализация нормальных операторов, канонический вид самосопряжённых, антисамосопряжённых и унитарных операторов. Полярное разложение невырожденного оператора. Экспоненциальное отображение.

Тема 13 (комплексные и вещественные структуры, 2 недели). Комплексификация и овеществление, вещественный геометрический смысл комплексных собственных векторов. Эрмитово продолжение евклидовой структуры, канонический вид вещественных евклидово (анти) самосопряжённых и ортогональных операторов. Кэлеровы тройки, описание кэлеровых троек, продолжающих заданную симплектическую структуру до эрмитовой: зигелево полупространство и соотношения Римана.

Тема 14 (кватернионы, 1-2 недели). Тело \mathbb{H} , норма, сопряжение, чисто мнимые кватернионы. Действие сопряжением, универсальное накрытие $S^3 \simeq SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$. Два семейства эрмитовых структур на \mathbb{H} , спиноры.

¹если на этот сюжет не хватит времени, его можно (частично) перенести в следующий семестр

²весьма желательно, чтобы в курсе геометрии к этому моменту студентов бы уже обучили евклидовой геометрии пространств \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 (а лучше и \mathbb{R}^n)

³по большей части над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\neq 2$

⁴тут уж точно требуется предварительное знание n -мерной евклидовой геометрии

Программа обязательного годового курса

«Алгебра – 2»

(НМУ, второй курс)

1-й семестр (14 – 15) недель

Тема 1 (тензорные произведения¹, 2 недели). Тензорное произведение модулей над алгеброй, образующие, соотношения и способы вычисления. Тензорные произведения векторных пространств, многообразия Сегре, стандартные канонические изоморфизмы, линейные и полилинейные отображения как тензоры. Тензорная алгебра векторного пространства, свёртки и двойственность. Линейный носитель тензора, вырожденные тензоры.

Тема 2 (симметрическая и внешняя алгебра², 2 недели). Симметрическая и внешняя алгебры векторного пространства, многообразия Веронезе и Грассмана. Симметрические и кососимметрические тензоры, поляризация многочленов и грассмановых многочленов, частные производные. Линейный носитель многочлена, соотношения Плюккера, задание многообразий Веронезе и Грассмана квадратичными уравнениями. Принцип Аронгольда³, формула Тейлора, касательные и поляры алгебраических многообразий.

Тема 3 (кольцо симметрических функций, 2 недели). Полиномы Шура как отношения определителей, формулы Пьери. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм, теорема о биекции, соотношения на числа полустандартных и стандартных таблиц данного веса. Комбинаторные полинома Шура, правило Литтлвуда – Ричардсона, формула Якоби – Труди⁴. Действие инволюции транспонирования диаграммы на кольце симметрических функций.

Тема 4 (пространства с операторами, 2 – 3 недели). Неприводимость, разложимость и полупростота, критерии полупростоты модуля над ассоциативной алгеброй. Лемма Шура. Теорема о двойном централизаторе, теорема Бернсайда⁵. Представления одного оператора. Свойства коммутирующих операторов. Представления конечных абелевых групп, характеры, двойственность Понтрягина.

Тема 5 (\mathfrak{sl}_2 -модули, 1 неделя). Строение неприводимых модулей, операторы Казимира, полная приводимость представлений.

Тема 6 (представления конечных групп, 2 – 3 недели). Групповая алгебра конечной группы есть прямая сумма алгебр эндоморфизмов неприводимых представлений. Скалярное произведение на групповой алгебре, формула Планшереля. Центр групповой алгебры, характеры, неприводимые идемпотенты. Соотношение на число и размерности неприводимых представлений. Кольцо представлений, ограничение и индуцирование, двойственность Фробениуса.

Тема 7 (представления симметрических групп, 2 – 3 недели). Симметризаторы Шура, минимальные левые идеалы в $\mathbb{C}[S_n]$. Модули таблоидов и модули Шпехта, табличный базис модуля Шпехта S_λ . Произведение Литтлвуда – Ричардсона, изоморфизм между кольцом представлений симметрических групп и кольцом симметрических функций.

Тема 8 (двойственность Шура – Вейля⁶). Функторы Шура $S^\lambda(V)$. Разложение $V^{\otimes n} \simeq S^\lambda(V) \otimes S_\lambda$ как $GL(V) \otimes S_n$ -модуля. Неприводимые представления группы $GL(V)$.

¹ в качестве пререквизита требуется знание основ проективной геометрии: проективные пространства и как задавать в них фигуры однородными уравнениями

² в качестве пререквизита требуется знание основ дифференциального исчисления многих переменных: частные производные и представление о (многомерной) формуле Тейлора

³ пространство $S^n V$ линейно порождается чистыми n -тыми степенями φ^n линейных форм $\varphi \in V$

⁴ совпадение комбинаторных полиномов Шура с теми, что задаются как отношения определителей

⁵ над алгебраически замкнутым полем множество операторов, действующих на векторном пространстве V , порождает алгебру $\text{End}(V)$, если и только если V неприводимо над этим множеством операторов

⁶ если позволит время

Тема 9 (категории и функторы, 2 – 3 недели). Определение и примеры категорий и функторов: открытые множества топологического пространства, полусимплициальные и симплициальные множества и их геометрические реализации. Категория функторов, алгебра стрелок малой категории, модули над алгеброй и модули над категорией. Представимые функторы, лемма Йонеды. Сопряжённые функторы, примеры: сингулярные цепи и геометрическая реализация, индуцирование – ограничение – коиндуцирование и т. п. Пределы диаграмм, замкнутость относительно пределов, пределы в категориях абелевых групп, колец, групп, топологических пространств и т. п.

Тема 10 (целые расширения колец, 2 – 3 недели). Свойства целых элементов, лемма Гаусса, нормальные кольца. Целость характеров неприводимых представлений конечных групп, размерность неприводимого представления делит порядок фактора группы по её центру. Алгебраическая зависимость и базисы трансцендентности. Если конечно порождённая алгебра над полем \mathbb{k} является полем, то она алгебраична над \mathbb{k} и конечномерна как векторное пространство.

Тема 11 (аффинная алгебраическая геометрия, 2 – 3 недели). Идеал и координатная алгебра аффинного алгебраического многообразия. Теоремы Гильберта о базисе и нулях полиномиального идеала. Антиквивалентность категории конечно порождённых приведённых алгебр над алгебраически замкнутым полем категории аффинных алгебраических многообразий над этим полем. Топология Зарисского, неприводимые компоненты. Рациональные функции и локализация.

Тема 12 (теория Галуа, 2 – 3 недели). Алгебраическое замыкание. Башни расширений, лемма о примитивном элементе. Продолжение гомоморфизмов, нормальность, сепарабельность. Группа Галуа, расширения Галуа, соответствие Галуа. Вычисление групп Галуа при помощи арифметической редукции. Группы Галуа конечных и круговых полей. Циклические и разрешимые расширения. Построения циркулем и линейкой и разрешимость уравнений в радикалах.