

### Множества и отображения

- A1◊1. Сколько подмножеств (включая  $\emptyset$  и  $X$ ) у множества  $X$ , состоящего из  $n$  элементов?
- A1◊2. Выразите пересечение множеств через разность множеств. Можно ли выразить разность через пересечение и объединение?
- A1◊3. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах а) шнурок б) курок в) колобок г) а... аб... б ( $\alpha$  букв а и  $\beta$  букв б) д)  $b_1 \dots b_1 b_2 \dots b_2 \dots \dots b_m \dots b_m$  ( $\beta_k$  букв  $b_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ ).
- A1◊4. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражениях а)  $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2$  б)  $(a + b + c)^3$  в)  $(a + b)^n$  г)  $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$ .
- A1◊5. Сколько имеется различных одночленов от  $n$  переменных полной степени<sup>1</sup> а) ровно  $d$  б) не больше  $d$ ?
- A1◊6. Цело ли число  $1000! / (100!^{10})$ ?
- A1◊7. Сколько имеется таких отображений из пятиэлементного множества в двухэлементное, чтобы у каждой точки было не менее двух прообразов?
- A1◊8. Фиксируем  $m, n \in \mathbb{N}$ . Сколько решений имеет уравнение  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$  а) в натуральных б) в целых неотрицательных числах  $x_i$ ?
- A1◊9. Фиксируем  $m, n \in \mathbb{N}$ . Сколько имеется отображений  $\{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  а) произвольных б) биективных в) возрастающих<sup>2</sup> г) инъективных д) неубывающих<sup>3</sup> е) сюръективных неубывающих ж) сюръективных?
- A1◊10. Сколько всего диаграмм Юнга<sup>4</sup> а) веса 6 б) веса 7, содержащих не более 3 строк в) без ограничений на вес, но содержащих не более  $p$  строк и не более  $q$  столбцов.
- A1◊11. Даны 4 попарно различных чашки, 4 неотличимых друг от друга стакана, 10 совершенно одинаковых кусков сахара и 7 соломинок всех цветов радуги. Сколькими способами можно разложить: а) соломинки по чашкам б) сахар по чашкам в) сахар по стаканам г) соломинки по стаканам?
- A1◊12. Как изменятся ответы в предыдущей задаче, если потребовать, чтобы после раскладывания не оставалось пустых ёмкостей?
- A1◊13. Стороны плоского проволочного правильного  $n$ -угольника раскрашивают в  $n$  цветов — каждую сторону в свой цвет. Сколько различных игрушек при этом получится?
- A1◊14. Каждую грань а) кубика б) правильного тетраэдра красят одним из шести фиксированных цветов, так чтобы все грани получились разноцветные. Сколько различных игрушек можно получить таким образом?
- A1◊15\* (задача Л. Г. Макара – Лиманова). Торговец газировкой коротает время манипулируя пятнадцатью одноразовыми стаканчиками, сложенными перед ним в несколько стопок. Одна манипуляция заключается в том, что он берёт верхний стаканчик из каждой стопки и составляет из них новую стопку<sup>5</sup>. Как разложатся стаканчики после 1000 таких манипуляций?

<sup>1</sup>полной степенью одночлена  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  называется сумма  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$

<sup>2</sup>отображение  $f$  называется *возрастающим*, если  $\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

<sup>3</sup>отображение  $f$  называется *неубывающим*, если  $\forall x_1, x_2 \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

<sup>4</sup>диаграмма Юнга  $\lambda$  — это невозрастающая последовательность чисел  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ ; при этом  $\ell(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} k$  называется

числом строк, а  $|\lambda| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  — весом диаграммы  $\lambda$ ; диаграмма  $\lambda = (4, 2, 2, 1)$  рисуется в виде



<sup>5</sup>стопка может состоять и из единственного стакана, который в этом случае и будет верхним

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8а			
б			
9а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
10а			
б			
в			
11а			
б			
в			
г			
12а			
б			
в			
г			
13			
14а			
б			
15			