Деление с остатком и разложение на множители

А3◊1. Пусть K — любое коммутативное кольцо с единицей, и $g \in K[x]$. Покажите, что
- **а)** для любого $f \in K[x]$ с обратимым старшим коэффициентом существуют такие $q, r \in K[x]$, что $g = fq + r$ и либо $\deg r < \deg f$, либо $r = 0$
- **б)** для любого $a \in K$ существует такой $q \in K[x]$, что $g(x) = q(x) \cdot (x - a) + g(a)$ в $K[x]$
- **в)** существует коммутативное кольцо $R \supseteq K$ с той же единицей, что у K, такое что g полностью разлагается в $R[x]$ на множители степени $\leqslant 1$.

А3◊2. Может ли неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\geqslant 2$ иметь
а) рациональные корни? **б)** кратные комплексные корни?

А3◊3. Пусть многочлены $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{Q}[x]$ попарно взаимно просты, и $F = f_1 f_2 \dots f_s$. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{Q}[x]/(F) \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{\nu} \mathbb{Q}[x]/(f_\nu)$ и найдите в $\mathbb{Q}[x]$ все многочлены с остатками $1 + x$, $1 + x^3$ и $1 + x^5$ от деления на $1 + x^2$, $1 + x^4$ и $1 + x^8$ соответственно.

А3◊4. В кольце $\mathbb{Z}/(360)$ найдите все решения уравнений **а)** $x^2 = 1$ **б)** $x^3 = 1$ **в)** $x^2 = 49$.

А3◊5. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле. Верно ли, что любая функция $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ является многочленом? Могут ли разные многочлены задавать одинаковые функции?

А3◊6. Будет ли полем **а)** $\mathbb{R}[x]/\big(x^4 + 1\big)$ **б)** $\mathbb{Q}[x]/\big(x^4 + 1\big)$ **в)** $\mathbb{Q}[x]/\big(x^2 - 3\big)$?

А3◊7. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены: **а)** $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ **б)** $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$.

А3◊8*. В кольце $\mathbb{Z}[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов: **а)** $t^4 + t + 1$ **б)** $t^5 + t^4 + t^2 + t + 2$ **в)** $t^6 + t^3 + 1$.

А3◊9 (Евклидовы кольца). Целостное[1] коммутативное кольцо A называется *евклидовым*, если на нём задана функция $\nu : A \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (*евклидова норма*) со свойствами: (1) $\forall\, a, b \in A$ $\nu(ab) \geqslant \nu(a)$ (2) $\forall\, b \neq 0$ $\exists\, q, r \in A : a = bq + r$ и при этом либо $r = 0$, либо $\nu(r) < \nu(b)$. Покажите, что для любых элементов a, b евклидова кольца A **а)** $\nu(ab) = \nu(a) \iff b$ обратим
- **б)** среди общих делителей a и b имеется единственный с точностью до умножения на обратимые элементы кольца делитель наибольшей нормы[2], и он делится на все общие делители
- **в) (алгоритм Евклида)** при $\nu(a) > \nu(b)$ нод(a, b) совпадает с последним ненулевым элементом последовательности r_n, в которой $r_1 = a$, $r_2 = b$ и $r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$ при $n > 2$ это (любой) удовлетворяющий свойствам (1) и (2) остаток от деления r_{n-2} на r_{n-1}
- **г)** нод$(a, b) = ax + by$ для подходящих $x, y \in A$; подберите такие x, y и найдите нод(a, b) для $(a, b) = (\,8\,385\,403\,,\ 2\,442\,778\,)$ в кольце $\mathbb{Z}$ и $(a, b) = (x^5 - 1, x^4 + x^2 + 1)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$

А3◊10. Покажите, что гауссовы кольца **а)** $\mathbb{Z}[i]$, $i^2 = -1$, **б)** $\mathbb{Z}[\omega]$, $\omega^2 + \omega = -1$, евклидовы.

А3◊11. Покажите, что любой идеал в евклидовом кольце является главным.

А3◊12. Являются ли $\mathbb{Q}[x, y]$ и $\mathbb{Z}[x]$ кольцами главных идеалов?

А3◊13. Пусть общие делители $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ исчерпываются ± 1. Обязательно ли конечно фактор кольцо $\mathbb{Z}[x]/(f, g)$?

А3◊14. Пусть $\Bbbk$ — любое (возможно, конечное) поле. Бесконечно ли множество неприводимых многочленов в $\Bbbk[x]$?

А3◊15. Найдите **а)** все неприводимые многочлены степени $\leqslant 5$ в $\mathbb{F}_2[x]$ **б)** все неприводимые многочлены степени 2 в $\mathbb{F}_3[x]$ **в)** число неприводимых многочленов степени 3 и 4 над $\mathbb{Z}/(3)$.

А3◊16. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое, и $f \in \mathbb{F}_p[x]$ — неприводимый многочлен степени n. Сколько элементов в факторе $\mathbb{F}_p[x]/(f)$? Является ли он полем?

А3◊17*. Покажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и простого p имеется поле из p^n элементов.

---

[1] т. е. с единицей и без делителей нуля

[2] он называется *наибольшим общим делителем* и обозначается нод(a, b)

Персональный табель ______________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (11 сентября 2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2а			
б			
3			
4а			
б			
в			
5			
6			
7а			
б			
8а			
б			
в			
9а			
б			
в			
г			
10а			
б			
11			
12			
13			
14			
15а			
б			
в			
16			
17			