Квадратичная взаимность

A3½◇1 (эйлеровы разложения). Покажите, что $\sin(mx)/\sin x$ является при нечётном $m \in \mathbb{N}$ многочленом от $\sin^2 x$, найдите степень, корни и старший коэффициент этого многочлена, и докажите тождества

а) $\dfrac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod\limits_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2 x - \sin^2\left(\dfrac{2\pi j}{m}\right)\right)$ б) $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod\limits_{j=0}^{m-1} \sin\left(x + \dfrac{2\pi j}{m}\right)$

A3½◇2 (символ Лежандра – Якоби). Пусть $p > 2$ — простое число. Сопоставим каждому $n \in \mathbb{Z}$ число

$$\left(\frac{n}{p}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0\,, & \text{если } n \text{ делится на } p \\ 1\,, & \text{если } n \text{ является ненулевым квадратом по модулю } p \\ -1\,, & \text{если } n \text{ не является квадратом по модулю } p \end{cases}$$

Покажите, что **а)** $\left(\frac{n}{p}\right) \equiv n^{(p-1)/2} \pmod p$ **б)** $\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right) \cdot \left(\frac{n}{p}\right)$. **в)** Вычислите $\sum\limits_{n=1}^{p-1} \left(\dfrac{n}{p}\right)$.

A3½◇3 (квадратичная взаимность по Ф. Г. М. Эйзенштейну). Сравните знак $\left(\frac{m}{p}\right)$ со знаком произведения

$$\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{p} \cdot j\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot j\right)}\,,$$

разложите все отношения синусов в этом равенстве по формулам из зад. A3½◇1 и докажите для любых простых чисел $p, q > 2$ *квадратичный закон взаимности* Гаусса

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\,.$$

A3½◇4 (квадратичная взаимность по Е. И. Золотарёву).

а) Пусть $a \in \mathbb{F}_p^*$. Как связан $\left(\frac{a}{p}\right)$ со знаком перестановки элементов множества $\mathbb{F}_p$ по правилу $x \mapsto ax$?

б) Как простых $p, q > 2$ связаны $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ со знаками перестановок элементов множества $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$ по правилам $\sigma_p : (x, y) \mapsto (x, x + py)$ и $\sigma_q : (x, y) \mapsto (qx + y, y)$?

в) Найдите знак композиции $\sigma_p \circ \sigma_q^{-1}$, рассматриваемой как перестановка элементов множества $\mathbb{Z}/(pq) \simeq \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$ и получите отсюда квадратичный закон взаимности.

A3½◇5. Найдите: **а)** $\left(\frac{-1}{p}\right)$ **б)** $\left(\frac{2}{p}\right)$ **в)** $\left(\frac{43}{109}\right)$ **г)** $\left(\frac{57}{179}\right)$.

A3½◇6. Докажите эквивалентность друг другу следующих свойств простого числа $p > 2$:

а) -1 является квадратом в $\mathbb{F}_p$ **б)** $p \not\equiv 3 \pmod 4$

в) в кольце $\mathbb{Z}[i]$ число p является произведением двух необратимых гауссовых чисел

г) p является суммой двух квадратов натуральных чисел

A3½◇7 (разложение в сумму двух квадратов). Докажите, что натуральное число тогда и только тогда не является ни квадратом, ни суммой двух квадратов, когда в его разложении на простые множители имеется нечётная степень простого числа вида $4k + 3$.

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3½(необязательный)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
в			
3			
4а			
б			
в			
5а			
б			
в			
г			
6а			
б			
в			
г			
7			