

### Квадратичная взаимность

**A3½♦1 (эйлеровы разложения).** Покажите, что  $\sin(mx)/\sin x$  является при нечётном  $m \in \mathbb{N}$  многочленом от  $\sin^2 x$ , найдите степень, корни и старший коэффициент этого многочлена, и докажите тождества

$$\text{а) } \frac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \sin^2 x - \sin^2 \left( \frac{2\pi j}{m} \right) \right) \quad \text{б) } (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod_{j=0}^{m-1} \sin \left( x + \frac{2\pi j}{m} \right)$$

**A3½♦2 (символ Лежандра – Якоби).** Пусть  $p > 2$  – простое число. Сопоставим каждому  $n \in \mathbb{Z}$  число

$$\left( \frac{n}{p} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ делится на } p \\ 1, & \text{если } n \text{ является ненулевым квадратом по модулю } p \\ -1, & \text{если } n \text{ не является квадратом по модулю } p \end{cases}$$

Покажите, что **а)**  $\left( \frac{n}{p} \right) \equiv n^{(p-1)/2} \pmod{p}$  **б)**  $\left( \frac{mn}{p} \right) = \left( \frac{n}{p} \right) \cdot \left( \frac{m}{p} \right)$ . **в)** Вычислите  $\sum_{n=1}^{p-1} \left( \frac{n}{p} \right)$ .

**A3½♦3 (квадратичная взаимность по Ф. Г. М. Эйзенштейну).** Сравните знак  $\left( \frac{m}{p} \right)$  со знаком произведения

$$\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin \left( \frac{2\pi m}{p} \cdot j \right)}{\sin \left( \frac{2\pi}{p} \cdot j \right)},$$

разложите все отношения синусов в этом равенстве по формулам из **зад. A3½♦1** и докажите для любых простых чисел  $p, q > 2$  *квадратичный закон взаимности Гаусса*

$$\left( \frac{p}{q} \right) \cdot \left( \frac{q}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

**A3½♦4 (квадратичная взаимность по Е. И. Золотарёву).**

- а)** Пусть  $a \in \mathbb{F}_p^*$ . Как связан  $\left( \frac{a}{p} \right)$  со знаком перестановки элементов множества  $\mathbb{F}_p$  по правилу  $x \mapsto ax$ ?
- б)** Как простых  $p, q > 2$  связаны  $\left( \frac{p}{q} \right)$  и  $\left( \frac{q}{p} \right)$  со знаками перестановок элементов множества  $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$  по правилам  $\sigma_p : (x, y) \mapsto (x, x + py)$  и  $\sigma_q : (x, y) \mapsto (qx + y, y)$ ?
- в)** Найдите знак композиции  $\sigma_p \circ \sigma_q^{-1}$ , рассматриваемой как перестановка элементов множества  $\mathbb{Z}/(pq) \simeq \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$  и получите отсюда квадратичный закон взаимности.

**A3½♦5.** Найдите: **а)**  $\left( \frac{-1}{p} \right)$  **б)**  $\left( \frac{2}{p} \right)$  **в)**  $\left( \frac{43}{109} \right)$  **г)**  $\left( \frac{57}{179} \right)$ .

**A3½♦6.** Докажите эквивалентность друг другу следующих свойств простого числа  $p > 2$ :

- а)**  $-1$  является квадратом в  $\mathbb{F}_p$
- б)**  $p \not\equiv 3 \pmod{4}$
- в)** в кольце  $\mathbb{Z}[i]$  число  $p$  является произведением двух необратимых гауссовых чисел
- г)**  $p$  является суммой двух квадратов натуральных чисел

**A3½♦7 (разложение в сумму двух квадратов).** Докажите, что натуральное число тогда и только тогда не является ни квадратом, ни суммой двух квадратов, когда в его разложении на простые множители имеется нечётная степень простого числа вида  $4k + 3$ .

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
в			
3			
4а			
б			
в			
5а			
б			
в			
г			
6а			
б			
в			
г			
7			