Обращение Мёбиуса

А3⅔◊1 (функция Мёбиуса). Функция Мёбиуса $\mu(n)$ сопоставляет числу $n\in\mathbb{N}$ нуль, если n делится на квадрат простого числа, и $(-1)^s$, где s — число всех натуральных простых делителей n, если n не делится на квадраты простых чисел; кроме того, $\mu(1)=1$. Покажите, что

а) $\mu(n)$ является мультипликативным характером числа n б) $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 \text{ при } n=1\\ 0 \text{ при } n>1\end{cases}$

А3⅔◊2 (обращение Мёбиуса). Пусть для функции $g:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ при каждом $n\in\mathbb{N}$ известно значение суммы $\sigma(n)=\sum\limits_{d|n}g(d)$. Покажите, что $g(n)=\sum\limits_{d|n}\sigma(d)\cdot\mu(n/d)$.

А3⅔◊3. Для произвольного $m\in\mathbb{N}$ вычислите $\sum\limits_{d|m}\varphi(d)$, где φ — функция Эйлера.

А3⅔◊4 (круговые многочлены). Приведённый многочлен $\Phi_n\in\mathbb{C}[x]$, корни которого суть комплексные первообразные корни степени n из 1 и только они, называется n-тым *круговым многочленом*. Найдите $\deg\Phi_n$ и покажите, что **а)** $x^n-1=\prod\limits_{d|n}\Phi_d(x)$ **б)** $\Phi_n(x)=\prod\limits_{d|n}\left(x^{n/d}-1\right)^{\mu(d)}$

в) $\Phi_{2n}(x)=\Phi_n(-x)$ при нечётном n **г)** $\Phi_{pn}(x)=\Phi_n\left(x^p\right)/\Phi_n(x)$ при простом $p\nmid n$, $p>2$

д) для всех простых p $\Phi_p(x)=x^{p-1}+\dots+x+1$ и $\Phi_{p^k}(x)=\Phi_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$

е) при простых $p_i\neq p_j$ $\Phi_{p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n}}(x)=\Phi_{p_1p_2\cdots p_n}\left(x^{p_1^{k_1-1}\cdots p_n^{k_n-1}}\right)$ **ж)** $\Phi_n\in\mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

А3⅔◊5. Обозначим через i_m число неприводимых приведённых многочленов степени m в $\mathbb{F}_p[x]$. Докажите в $\mathbb{Q}[[t]]$ равенство $(1-pt)^{-1}=\prod\limits_{m\in\mathbb{N}}\left(1-t^m\right)^{-i_m}$.

А3⅔◊6. Используя подходящую модификацию обращения Мёбиуса, докажите, что число неприводимых многочленов степени n в $\mathbb{F}_p[x]$ равно $\frac{1}{n}\sum\limits_{d|n}p^d\mu(n/d)$.

А3⅔◊7 (локально конечные чумы). Множество называется *частично упорядоченным* (или чумом) если на нём задано рефлексивное транзитивное *кососимметричное*[1] отношение $x\leqslant y$. чум называется *локально конечным*, если $\forall\, x,y$ *отрезок* $[x,y]\overset{\text{def}}{=}\{\,z\mid x\leqslant z\leqslant y\,\}$ конечен. Являются ли локально конечными чумами: **а)** $\mathbb{N}$ с отношением $n|m$ **б)** совокупность конечных подмножеств произвольного множества с отношением $X\subseteq Y$

А3⅔◊8 (алгебра инцидентности чума). Для локально конечного чума $\mathfrak{P}$ обозначим через $\mathcal{A}(\mathfrak{P})$ множество всех функций $\varrho:\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}\to\mathbb{C}$, обращающихся в нуль на всех парах (x,y), не находящихся в отношении $x\leqslant y$. Зададим в $\mathcal{A}(\mathfrak{P})$ сложение $\varrho_1+\varrho_2:(x,y)\mapsto\varrho_1(x,y)+\varrho_2(x,y)$ и умножение $\varrho_1\star\varrho_2:(x,y)\mapsto\sum\limits_{x\leqslant z\leqslant y}\varrho_1(x,z)\varrho_2(z,y)$. Покажите, что получилось (некоммутативное) кольцо с единицей, обратимые элементы которого суть такие функции ϱ, что $\forall\,x\in\mathfrak{P}$ $\varrho(x,x)\neq 0$.

А3⅔◊9 (функция Мёбиуса чума). Убедитесь, что функция $\zeta(x,y)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}1 \text{ при } x\leqslant y\\ 0 \text{ иначе}\end{cases}$ обратима в $\mathcal{A}(\mathfrak{P})$ и функция $\mu\overset{\text{def}}{=}\zeta^{-1}$ удовлетворяет равенствам[2] $\mu(x,y)=-\sum\limits_{x\leqslant z<y}\mu(x,z)=-\sum\limits_{x<z\leqslant y}\mu(z,y)$.

А3⅔◊10 (обращение Мёбиуса в чуме). Пусть в чуме $\mathfrak{P}$ имеется наименьший элемент[3]. Покажите, что любая функция $g:\mathfrak{P}\to\mathbb{C}$ восстанавливается по значениям своих сумм $\sigma(x)=\sum\limits_{y\leqslant x}g(y)$ по формуле $g(x)=\sum\limits_{y\leqslant x}\sigma(y)\mu(y,x)$.

А3⅔◊11. Найдите функции Мёбиуса для чумов из зад. А3⅔◊7. Во что превращается в этих случаях предыдущая формула обращения?

---

[1]т. е. из $x\leqslant y$ и $y\leqslant x$ следует, что $x=y$

[2]запись $x<y$ означает, что $x\leqslant y$ и $x\neq y$

[3]т. е. такой элемент m, что $\forall\,x\in\mathfrak{P}$ $m\leqslant x$

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3⅔(необязательный)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			