Идеалы, фактор кольца и делимость

А5◇1. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ — произвольные идеалы. Положим[1] $\sqrt{\mathfrak{a}} \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in \mathfrak{a}\}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, \ b \in \mathfrak{b}\}$ и обозначим через $\mathfrak{ab}$ идеал, порождённый произведениями ab с $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Верно ли[2], что **а)** $\sqrt{\mathfrak{a}}$ это идеал **б)** произведения ab с $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ и так, сами по себе, образуют идеал **в)** $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ **г)** $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A \Rightarrow \mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ **д)** $\sqrt{\mathfrak{ab}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{b}}$ **е)** $(\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \ \& \ \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{b}}) \Rightarrow \mathfrak{ab} = \sqrt{\mathfrak{ab}}$.

А5◇2. Опишите все идеалы в кольце $\Bbbk[[x]]$, где $\Bbbk$ — любое поле.

А5◇3 (китайская теорема об остатках). Пусть идеалы $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_m \subset A$ коммутативного кольца A с единицей таковы, что $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ для всех $i \neq j$. Покажите, что $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_m$ и постройте изоморфизм $A/\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_m \xrightarrow{\sim} (A/\mathfrak{a}_1) \times (A/\mathfrak{a}_2) \times \dots \times (A/\mathfrak{a}_m)$.

А5◇4 (максимальность, простота и неприводимость). Собственный[3] идеал $\mathfrak{a} \subset A$ называется *простым* (соотв. *максимальным*), если $A/\mathfrak{a}$ не имеет делителей нуля (соотв. является полем). Элемент $a \in A$ называется *простым*, если идеал $(a) \subset A$ прост, и *неприводимым*, если $a = rs \Rightarrow r$ или s обратим. Верно ли, что **а)** собственный идеал максимален , если и только если он не содержится ни в каком строго большем собственном идеале **б)** все простые элементы неприводимы **в)** в кольце главных идеалов все неприводимые элементы просты.

А5◇5. Докажите, что простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ содержит пересечение конечного набора идеалов только тогда, когда он содержит хотя бы один из них.

А5◇6. Докажите, что идеал $\mathfrak{a} \subset A$ содержится в объединении конечного набора простых идеалов только тогда, когда он содержится в одном из них.

А5◇7*. Докажите, что пересечение всех простых идеалов любого коммутативного кольца с единицей совпадает с его *нильрадикалом*[4] $\sqrt{0}$.

А5◇8*. Найдите[5] в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ непростой неприводимый элемент и элемент, имеющий два различных[6] разложения на неприводимые множители.

А5◇9. Найдите все рациональные корни многочлена $2x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 2x - 3$.

А5◇10. Может ли неприводимый в $\mathbb{Z}[x]$ многочлен быть приводим в $\mathbb{Q}[x]$?

А5◇11. Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ все различны. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены:
а) $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - 1$ **б)** $(x - a_1)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$ **в)** $x^{105} - 9$.

А5◇12. Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики p и $a \in \Bbbk$. Верно ли, что $f(x) = x^p - a$ либо неприводим в $\Bbbk[x]$, либо имеет p-кратный корень в $\Bbbk$?

А5◇13. Пусть многочлен $f(x) = x^p - x - a$, где $a \in \mathbb{F}_p$, имеет в некоем расширении $F \supset \mathbb{F}_p$ корень ζ . Явно укажите в F ещё $p - 1$ корней f. Верно ли, что над $\mathbb{F}_p$ многочлен f либо неприводим, либо полностью разлагается на линейные множители?

---

[1] идеал $\sqrt{\mathfrak{a}}$ называется *радикалом* идеала $\mathfrak{a}$

[2] верные утверждение докажите, к неверным приведите явные контрпримеры

[3] т. е. отличный от нуля и всего кольца

[4] т. е. с множеством всех нильпотентных элементов кольца

[5] при решении этой задачи полезно понятие *нормы* $\|a + b\sqrt{5}\| \overset{\text{def}}{=} (a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$ и то, что норменное отображение $z \mapsto \|z\|$ является мультипликативным гомоморфизмом $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$

[6] неприводимые сомножители которых нельзя привести в биективное соответствие друг с другом так, чтобы соответственные сомножители различались на обратимый множитель

Персональный табель ______________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок №5 (9 октября 2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
е			
2			
3			
4а			
б			
в			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11а			
б			
в			
12			
13			