

Векторные пространства

- А6◊1.** Линейно зависимы ли в пространстве функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наборы а) $1, \sin x, \sin^2 x, \dots, \sin^m x$
 б) $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}$ в) $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ г) $x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_m}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ все различны)
- А6◊2.** Линейно зависимы ли в пространстве функций $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ наборы
 а) x, x^2, \dots, x^{p+1} б) $x^p, x^{p^2}, \dots, x^{p^p}$?
- А6◊3.** Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов?
- А6◊4.** В пространстве V векторы u_1, u_2, \dots, u_k линейно независимы, а векторы e_1, e_2, \dots, e_n таковы, что при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ векторы $e_1, \dots, e_{i-1}, u_i, e_{i+1}, \dots, e_n$ образуют базис. Верно ли, что все наборы $u_1, \dots, u_i, e_{i+1}, \dots, e_n$ являются базисами?
- А6◊5.** Приведите пример конечномерного пространства W и трёх попарно трансверсальных подпространств $U, V, T \subset W$, таких что $\dim U + \dim V + \dim T = \dim W$, но $W \neq U \oplus V \oplus T$.
- А6◊6.** Пусть $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств $U, V \subset V$. Обязательно ли $U + V$ равно одному из подпространств U, V , а $U \cap V$ — другому?
- А6◊7.** Пусть k -мерные подпространства $W_1, W_2, \dots, W_m \subset V$ таковы, что $\dim W_i \cap W_j = k - 1$ для любых $i \neq j$. Покажите, что существует либо $(k - 1)$ -мерное подпространство $U \subset V$, содержащееся во всех W_i , либо $(k + 1)$ -мерное подпространство $W \subset V$, содержащее все W_i .
- А6◊8.** Найдите размерность пространства а) многочленов степени $\leq n$ от m переменных
 б) однородных многочленов степени d от m переменных
 в) однородных симметрических¹ многочленов степени 10 от 4 переменных
 г) симметрических многочленов степени ≤ 3 от 4 переменных.
- А6◊9.** Какова размерность пространства многочленов $f \in \mathbb{R}[x]$ степени $\leq n$, обращающихся в нуль в точке $(3 - 2i) \in \mathbb{C}$?
- А6◊10.** Образуют ли базис в пространстве многочленов от x степени $\leq n$ с рациональными коэффициентами многочлены а) $(x - k)^n$ б) $\binom{x}{k}$ ($0 \leq k \leq n$)
- А6◊11 (пространство подмножеств).** Обозначим через $\mathcal{S}(M)$ множество всех подмножеств данного множества M . Покажите, что $\mathcal{S}(M)$ является векторным пространством над полем \mathbb{F}_2 относительно операций $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X$, и $0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$. Для m -элементного множества M найдите $\dim \mathcal{S}(M)$ и укажите в $\mathcal{S}(M)$ какой-нибудь базис.
- А6◊12 (конечные пространства).** Сколько всего имеется в d -мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов а) векторов б) упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов в) k -мерных векторных подпространств?
- А6◊13 (гауссовы биномиальные коэффициенты).** Обозначим через $\binom{d}{k}_q$ рациональную функцию от переменной q , дающую ответ к ???. Найдите $\lim_{q \rightarrow 1} \binom{d}{k}_q$.
- А6◊14.** Пусть $\dim U = n$, $\dim W = m$ и $U_0 \subset U$ и $W_0 \subset W$ — подпространства размерностей n_0 и m_0 . Покажите, что линейные отображения $F : U \rightarrow W$ с $\ker F \supset U_0$ и $\text{im } F \subset W_0$ образуют в $\text{Hom}(U, W)$ векторное подпространство, и найдите его размерность.
- А6◊15.** Для любых линейных операторов $F, G : V \rightarrow V$ докажите включения а) $\ker(FG) \supset \ker(G)$
 б) $\text{im}(FG) \subset \text{im}(F)$ и приведите (конечномерные) примеры, где оба этих включения строгие.
- А6◊16.** Для любого линейного оператора $F : V \rightarrow V$ ($\dim V < \infty$) докажите импликации:
 а) $\ker(F^k) = \ker(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ker(F^k) = \ker(F^{k+n})$
 б) $\text{im}(F^k) = \text{im}(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{im}(F^k) = \text{im}(F^{k+n})$
- А6◊17 (проекторы).** Пусть нетождественный оператор $F : V \rightarrow V$ имеет $F^2 = F$. Положим $V_0 = \ker F$ и $V_1 = \ker(F - \text{Id}_V)$. Покажите, что $V = V_0 \oplus V_1$ и F проектирует V на V_1 вдоль V_0 .

¹многочлен от m переменных x_1, x_2, \dots, x_m называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке номеров переменных; например, многочлен $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ симметрический, а многочлен $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ — нет

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
в			
13			
14			
15а			
б			
16а			
б			
17			