Матрицы

А7◇1. В $\mathbb{Q}^4$ найдите размерность и какой-либо базис у суммы и пересечения подпространств:
а) $\operatorname{span}\big((1,1,1,1),\,(1,-1,1,-1),\,(1,3,1,3)\big)$ и $\operatorname{span}\big((1,2,0,2),\,(1,2,1,2),\,(3,1,3,1)\big)$
б) $\operatorname{span}\big((1,1,0,0),\,(0,1,1,0),\,(0,0,1,1)\big)$ и $\operatorname{Ann}\big((1,0,1,0),\,(0,2,1,1),\,(1,2,1,2)\big)$
в) $\operatorname{Ann}\big((1,1,0,0),\,(0,1,1,0)),\,(0,0,1,1)\big)$ и $\operatorname{Ann}\big((1,2,0,2),\,(1,2,1,2),,\,(3,1,3,1)\big)$

А7◇2. Выясните, является ли сумма подпространств $U,W\subset\Bbbk^n$ прямой, и если да, найдите проекции стандартных базисных векторов $\Bbbk^n$ на каждое из подпространств вдоль другого.
а) U задано уравнением $x_1+x_2+\dots=x_n=0$, а W — системой $x_1=x_2=\ \cdots\ =x_n$
б) $U=\operatorname{span}\big((1,1,1,1),\,(-1,-2,0,1)\big)$, $W=\operatorname{span}\big((-1,-1,1,-1),\,(2,2,0,1)\big)$ в $\mathbb{Q}^4$.

А7◇3. На какую матрицу и с какой стороны надо умножить прямоугольную матрицу, чтобы **а)** её i-тая и j-тая строки поменялись местами **б)** её i-тая строка умножилась на λ **в)** к её i-той строке прибавилась j-тая, умноженная на λ **г)** то же, но со столбцами.

А7◇4 (теорема о ранге). Покажите, что у любой матрицы $A\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ размерность линейной оболочки её строк в $\Bbbk^n$ равна размерности линейной оболочки её столбцов[1] в $\Bbbk^m$.

А7◇5. Покажите, что каждая матрица ранга 1 **а)** является произведением столбца на строку **б)** пропорциональна своему квадрату, буде она квадратная.

А7◇6. Докажите для любых матриц $A\in\operatorname{Mat}_{k\times\ell}$, $B\in\operatorname{Mat}_{\ell\times m}$, $C\in\operatorname{Mat}_{m\times n}$ неравенства:
а) $\operatorname{rk}(AB)\leqslant\min(\operatorname{rk}A,\operatorname{rk}B)$ **б)** $\operatorname{rk}(AB)+\operatorname{rk}(BC)\leqslant\operatorname{rk}(ABC)+\operatorname{rk}(B)$ **в)** $\operatorname{rk}(A)+\operatorname{rk}(B)\leqslant\operatorname{rk}(AB)+\ell$.

А7◇7. Есть 7 одинаковых банок, каждая на $9/10$ заполнена краской одного из семи цветов радуги[2]. Можно ли переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое получить хоть в одной из банок колер, в котором все 7 красок смешаны в равной пропорции?

А7◇8 (коммутатор). Разность $[A,B]=AB-BA$ называется *коммутатором* квадратных матриц $A,B\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$. Докажите, что для любых $A,B,C\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ выполняются *правила Лейбница*:
а) $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$ **б)** $[A,[B,C]]=[[A,B],C]+[B,[A,C]]$.

А7◇9. Выразите $(A+B)^n$ через A^iB^j, если **а)** $[A,B]=0$ **б*)** $[A,B]=B$ **в*)** $[A,B]=A$.

А7◇10* (лемма Барта). Пусть $\operatorname{rk}[A,B]=1$. Покажите, что у A и B есть общий собственный вектор[3].

А7◇11 (след). Сумма диагональных элементов $\operatorname{tr}A\overset{\text{def}}{=}\sum a_{ii}$ называется *следом* квадратной матрицы A. Покажите, что **а)** $\forall\,A,B\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ $\operatorname{tr}[A,B]=0$ **б)** $\forall\,A\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ и $\forall\,C\in\operatorname{GL}_n(\Bbbk)$ $\operatorname{tr}(C^{-1}AC)=\operatorname{tr}(A)$ **в)** если $\operatorname{tr}(AX)=0$ $\forall\,X\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ с $\operatorname{tr}X=0$, то $A=\lambda E$ для некоторого $\lambda\in\Bbbk$.

А7◇12 (нильпотентные матрицы). Матрица $A\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ называется *нильпотентной*, если $A^n=0$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$. Покажите, что если A нильпотентна, то матрицы $E\pm A$ обратимы.

А7◇13. Нильпотентна ли сумма $A+B$ нильпотентных матриц A и B? Докажите, что да, если
а) $[A,B]=0$ **б*)** $[A,[A,B]]=[B,[B,A]]=0$.

А7◇14. Решите в $\operatorname{Mat}_2(\Bbbk)$ уравнения **а)** $X^2=0$ **б)** $X^3=0$ **в)** $X^2=X$ **г)** $X^2=E$ **д)** $X^2=-E$.

А7◇15. Пусть матрица A диагональна, и все её диагональные элементы различны. Покажите, что любая матрица, коммутирующая с A, имеет вид $f(A)$ для некоторого $f(x)\in\Bbbk[x]$.

А7◇16. Покажите, что $\forall\,A\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ $\exists\,f\in\Bbbk[x]\,:\,f(A)=0$.

А7◇17. Для ненулевого $a\in\mathbb{C}$ вычислите: **а)** $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix}a&1&1\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}^{-1}$.

А7◇18. Напишите явную формулу для (ij)-того элемента матрицы, обратной к верхнетреугольной матрице (h_{ij}) с единицами по главной диагонали[4].

А7◇19. Пусть квадратные матрицы A,B,C,D обратимы. Явно вычислите $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}^{-1}$ в предположении, что $A-BD^{-1}C$, $C-DB^{-1}A$, $B-AC^{-1}D$, $D-CA^{-1}B$ тоже обратимы.

[1] эти размерности называются *рангом* и обозначается $\operatorname{rk}A$
[2] в каждой банке — свой цвет и все цвета разные
[3] т. е. такой столбец $v\in\mathbb{C}^n$, что $Av=\lambda v$ и $Bv=\mu v$ для некоторых $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ (мы считаем, что $A,B\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$)
[4] найдите ответ, пригодный и для матриц с элементами из *некоммутативного* кольца

Персональный табель ______________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (6 ноября 2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2а			
б			
3			
4			
5а			
б			
6а			
б			
в			
7			
8а			
б			
9а			
б			
в			
10			
11а			
б			
в			
12			
13а			
б			
14а			
б			
в			
г			
д			
15			
16			
17			
18			
19			