

Определители

A8◊1. Вычислите $\text{sgn}(n, (n - 1), \dots, 2, 1)$ и $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A8◊2. Пусть $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}), C \in \text{Mat}_m(\mathbb{k}), B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$. Вычислите $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ и покажите, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

A8◊3. Вычислите определитель матрицы с 0 на главной диагонали и 1 в остальных местах.

A8◊4. Две строки матрицы 3×3 -матрицы заполнены целыми числами так, что нод чисел в каждой из этих строке равен единице. Всегда ли третью строку этой матрицы можно заполнить целыми числами так, чтобы определитель матрицы оказался равным единице?

A8◊5. Сколько всего имеется а) 2×2 матриц заданного определителя над полем \mathbb{F}_p, p — простое б) невырожденных $n \times n$ матриц над полем из q элементов.

A8◊6. Числа $1, 2, 3, \dots, n^2$ всевозможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n \times n$. Найдите сумму определителей всех этих матриц.

A8◊7. Покажите, что определитель 3-диагональной матрицы с 1 по главной диагонали и непосредственно над ней и -1 непосредственно под ней является числом Фибоначчи.

A8◊8. Будем обозначать через $(f(i, j)) \in \text{Mat}_n(K)$ квадратную матрицу, у которой элемент в пересечении i -той строки с j -тым столбцом равен $f(i, j)$, где $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow K$ — формула, перерабатывающая пару натуральных чисел (i, j) в элемент $f(i, j) \in K$. Для двух заданных наборов чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ вычислите а) $\det(\alpha_i \beta_j)$ б) $\det(\cos(\alpha_i - \beta_j))$ в) $\det(\alpha_i^{j-1})$ г) $\det(\alpha^{j-i-1 \pmod n})$.

A8◊9 (теорема об окаймляющих минорах). Пусть матрица A содержит такую невырожденную квадратную подматрицу размера $m \times m$, что все содержащие её подматрицы размера $(m + 1) \times (m + 1)$ вырождены. Докажите, что $\text{rk } A = m$.

A8◊10. Вершины связного графа Γ занумерованы числами от 1 до n . Матрица $A_\Gamma = (a_{ij})$ имеет диагональные элементы a_{ii} , равные числу ребер, сходящихся в i -той вершине, а остальные элементы a_{ij} равны единице, если вершины i и j соединены ребром, и нулю — если не соединены. Докажите, что $\det A = 0$, а все алгебраические дополнения A_{ii} к элементам главной диагонали отличны от нуля и равны между собой. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу в предположении, что граф Γ дерево. Покажите, что Γ дерево, если и только если $A_{ii} = 1$.

A8◊11. Для квадратной матрицы $A \in \text{Mat}_n(K)$ многочлен $\chi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - A) \in K[t]$ называется *характеристическим*. а) Выразите его коэффициенты через миноры матрицы A . б) Покажите, что характеристический многочлен матрицы линейного оператора $F : V \rightarrow V$ не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица.

A8◊12. Пусть $AB = E$. Докажите соотношение $a_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{IJ}}$ на дополнительные миноры.

A8◊13. Вычислите все частные производные $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \dots \partial a_{i_k j_k}}$.

A8◊14. Для $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ докажите в $K[x, y]$ равенство $\det(xA + yB) = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \cdot \text{tr}(\mathcal{A}_k \cdot \mathcal{B}_k^\vee)$, где

\mathcal{A}_k и \mathcal{B}_k^\vee суть матрицы размера $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$, у которых в позиции IJ стоят, соответственно, минор a_{IJ} матрицы A и алгебраическое дополнение $(-1)^{|I|+|J|} a_{\overline{IJ}}$ к IJ -минору матрицы B .

A8◊15. Покажите, что однородный грассманов многочлен ω степени 2 тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

A8◊16* (соотношение Плюккера). Существует ли комплексная 2×4 матрица с 2×2 минорами а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (если да — приведите пример).

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
9			
10			
11а			
б			
12			
13			
14			
15			
16а			
б			