

### Пространства с оператором



- A10◊1. Всякая ли матрица сопряжена своей транспонированной?
- A10◊2. Приведите пример нетождественного оператора без циклического вектора<sup>1</sup>.
- A10◊3. Перечислите классы подобных матриц в  $\text{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$ ,  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_p)$  для  $p = 2, 3, 5$ .
- A10◊4. Найдите степень минимального многочлена квадратной матрицы ранга 1.
- A10◊5. Пусть характеристический многочлен линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  неприводим и имеет степень  $d$ . Покажите, что  $\dim V = d$  и  $\forall v \in V \setminus 0$  векторы  $v, Fv, \dots, F^{d-1}v$  составляют базис в  $V$ .
- A10◊6. Покажите, что каждый линейный оператор  $G : \mathbb{k}[t]/(f) \rightarrow \mathbb{k}[t]/(f)$ , перестановочный с умножением на  $t$ , является оператором умножения на многочлен  $g(t) = G([1])$ .
- A10◊7. Пусть степень минимального многочлена линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  равна  $\dim V$ . Всякий ли оператор, перестановочный с  $F$ , является многочленом от  $F$ ?
- A10◊8. Каждый ли оператор  $G$ , перестановочный со всеми операторами, перестановочными с оператором  $F$  над алгебраически замкнутым полем, является многочленом от  $F$ ?
- A10◊9. Найдите  $\dim \text{Hom}_{\mathbb{k}[x]}(\mathbb{k}[x]/(f), \mathbb{k}[x]/(g))$ , когда  $f = p^n$ ,  $g = p^m$ , где  $p \in \mathbb{k}[x]$  неприводим, и когда  $\text{nod}(f, g) = 1$ .
- A10◊10. Бывают ли  $(n + 1)$ -мерные пространства коммутирующих полупростых операторов на  $\mathbb{C}^n$ ?
- A10◊11. Покажите, что<sup>2</sup>  $(F + G)_s = F_s + G_s$  и  $(F + G)_n = F_n + G_n$ , если  $FG = GF$ .
- A10◊12. Линейный оператор  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет матрицу с числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Когда он диагонализуем над  $\mathbb{R}$ ?
- A10◊13. Диагонализуем ли над  $\mathbb{Q}$  оператор  $F$ , удовлетворяющий уравнению  $F^3 = 6F^2 - 11F + 6E$ ?
- A10◊14. Минимальный многочлен оператора  $F : V \rightarrow V$  равен  $g_1g_2$  и  $\text{nod}(g_1, g_2) = 1$ . Покажите, что  $V = U_1 \oplus U_2$  с  $F(U_i) \subset U_i$  и минимальными многочленами  $F|_{U_i}$  равными  $g_i$ .
- A10◊15. Равносильна ли нильпотентность  $F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$  тому, что  $\text{tr } F^k = 0$  при  $1 \leq k \leq n$ ?
- A10◊16. Установите биекцию между разложениями  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_s$  и такими разложениями  $1 = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s$  в  $\text{End } V$ , что  $\pi_i^2 = \pi_i$  и  $\pi_i\pi_j = \pi_j\pi_i = 0$  при  $i \neq j$ .
- A10◊17. Пусть операторы  $A$  и  $B$  таковы, что  $AB - BA = B$ . Покажите, что  $B$  нильпотентен.
- A10◊18\* (лемма Барта). Над алгебраически замкнутым полем докажите, что любые два оператора  $A$  и  $B$  с  $\text{rk}(AB - BA) = 1$  имеют общий собственный вектор.
- A10◊19. Найдите ЖНФ квадрата  $J_m^2(\lambda)$  жордановой  $m \times m$ -клетки  $J_m(\lambda)$  а) с  $\lambda \neq 0$  б) с  $\lambda = 0$ .
- A10◊20. Найдите  $f(J_m(\lambda))$  для аналитической в окрестности  $\lambda \in \mathbb{C}$  функции  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- A10◊21. Дана матрица  $A \in \text{Mat}_{n \times n}$ . Операторы  $L_A, R_A, \text{Ad}_A : \text{Mat}_{n \times n} \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}$  переводят  $X \in \text{Mat}_{n \times n}$  в  $L_A(X) = A \cdot X$ ,  $R_A(X) = X \cdot A$ ,  $\text{Ad}_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}$ . Вычислите их следы и определители.
- A10◊22. Матрица  $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{k})$  действует на пространстве однородных многочленов степени 2 от двух переменных  $x = (x_1, x_2)$  оператором  $f(x) \mapsto f(x \cdot A)$ . Найдите его след и определитель.
- A10◊23. Найдите собственные числа, собственные и корневые подпространства и минимальный многочлен оператора а)  $f(x) \mapsto f(x - 1, y + 1)$  в линейной оболочке мономов  $x^n y^m$  с  $0 \leq m, n \leq 2$  б)  $f(x) \mapsto \int_0^1 (x^2 y + xy^2) f(y) dy$  на пространстве  $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq 3\}$  в)  $f(x) \mapsto f(ax + b)$  на пространстве  $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq n\}$ .
- A10◊24. Решите в  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$  уравнения а)  $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  б)  $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ .
- A10◊25. Найдите а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$  б)  $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}^{50}$ .
- A10◊26. Вычислите  $\sin A$  и  $e^A$  для матриц а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  б)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

<sup>1</sup>вектор  $v \in V$  называется *циклическим* для оператора  $F : V \rightarrow V$ , если векторы  $F^m v$ ,  $m \geq 0$ , линейно порождают  $V$   
<sup>2</sup> $F_s$  и  $F_n$  означают полупростое и нильпотентное слагаемые разложения Жордана оператора  $F$



№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19а			
б			
20			
21			
22			
23а			
б			
в			
24а			
б			
25а			
б			
26а			
б			