

## Примеры групп

- A11◊1. Перечислите все подгруппы в группах диэдров  $D_4$  и  $D_6$ .
- A11◊2. Покажите, что любая подгруппа циклической группы тоже циклическая.
- A11◊3. Наименьшее такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $g^n = e$  называется *порядком* элемента  $g$  и обозначается  $\text{ord } g$ .  
Верно ли, что: а)  $\forall n \in \mathbb{N} \text{ord}(g^n) = \text{ord}(g) / \text{нод}(n, \text{ord}(g))$  б)  $fg = gf \Rightarrow \text{ord}(fg) \mid \text{нок}(\text{ord}(f), \text{ord}(g))$ .
- A11◊4. Чему может быть равен  $\text{ord}(fg)$ , если  $\text{ord}(gf) = n$ ?
- A11◊5. Все ли элементы нечётного порядка являются квадратами?
- A11◊6. Покажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.
- A11◊7. Пусть  $\forall k \in \mathbb{N}$  число элементов порядка  $k$  в конечных группах  $G$  и  $H$  одинаково. Верно ли, что  $G \simeq H$  для а) любых б) абелевых конечных групп  $G$  и  $H$ ?
- A11◊8. Что можно сказать о чётности порядка произвольной нечётной перестановки?
- A11◊9. Вычислите 100-ю степень перестановки  $(3, 5, 4, 1, 2)$ .
- A11◊10. Сколько элементов  $S_5$  неподвижно при сопряжении перестановкой  $(3, 5, 1, 2, 4)$ ?
- A11◊11. Перестановка  $\sigma \in S_n$  называется *инволюцией*, если  $\sigma^2 = \text{Id}$ . Верно ли, что а) перестановка является инволюцией, если и только если в её цикловом типе есть только циклы длины 1 и 2 б) любой цикл  $\tau \in S_n$  длины  $\geq 3$  является композицией двух инволюций.
- A11◊12 (задача Н. Н. Константинова). В городе  $N$  разрешаются лишь простые двусторонние обмены квартир<sup>1</sup>, причём в течение одного дня каждому жителю разрешается сделать не более одного обмена. Можно ли за два дня осуществить любой, сколь угодно сложный обмен<sup>2</sup>?
- A11◊13\*. Можно ли в игре «15» осуществить транспозицию фишек «1» и «2» так, чтобы все остальные фишки в результате оказались в начальных своих положениях?
- A11◊14. Говорят, что группа  $G$  порождается элементами  $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ , если любой элемент  $G$  является произведением элементов  $g_i$  (возможно, с повторениями). Порождается ли а)  $S_n$  циклами  $|1, 2\rangle$  и  $|1, 2, 3, \dots, n\rangle$ ? б)  $A_n$  циклами  $|1, 2, 3\rangle, |1, 2, 4\rangle, \dots, |1, 2, n\rangle$ ?
- A11◊15. Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?
- A11◊16. Какие перестановки а) вершин тетраэдра б) диагоналей куба можно получить собственными движениями этих фигур?
- A11◊17. Найдите порядки собственной и несобственной групп а) пяти платоновых тел в  $\mathbb{R}^3$  и правильных четырёхмерных б) куба в) кокуба<sup>3</sup> г) симплекса<sup>4</sup> д) октаплекса<sup>5</sup>.
- A11◊18. У каких платоновых тел полная группа изоморфна прямому произведению собственной группы на группу знаков  $\{\pm 1\}$ ?
- A11◊19. При каких  $n$  и  $m$  группа диэдра  $D_{mn}$  изоморфна  $D_m \times \mathbb{Z}/(n)$ ?
- A11◊20. Покажите, что множество *кватернионных единиц*  $Q_8 = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$ , которые перемножаются так, что  $e$  является единицей, «минус на минус даёт плюс»,  $i^2 = j^2 = k^2 = -e$  и  $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ , образуют группу, и выясните, изоморфна ли она  $D_4$ .
- A11◊21. Найдите все пары изоморфных групп в наборах: а)  $D_8, D_4 \times \mathbb{Z}/(2), Q_8 \times \mathbb{Z}/(2)$   
б)  $S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(4), Q_8 \times \mathbb{Z}/(3), D_4 \times \mathbb{Z}/(3)$

<sup>1</sup>когда  $A$  въезжает в квартиру, принадлежащую  $B$ , а  $B$  — в квартиру, принадлежащую  $A$ ; все более сложные обмены, скажем, когда  $A$  въезжает в квартиру, принадлежащую  $B$ ,  $B$  — в квартиру, принадлежащую  $C$ , а уже  $C$  — в квартиру, принадлежащую  $A$ , запрещены

<sup>2</sup>т. е. произвольную биекцию из множества квартир в себя

<sup>3</sup>выпуклой оболочки концов векторов  $\pm e_i$ , где  $e_1, e_2, e_3, e_4$  образуют стандартный базис в  $\mathbb{R}^4$

<sup>4</sup>выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$  в  $\mathbb{R}^5$

<sup>5</sup>выпуклой оболочки вершин кокуба и вершин куба  $|x_i| \leq c$ , вписанного в единичную сферу с центром в нуле в  $\mathbb{R}^4$

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3а			
б			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			
11а			
б			
12			
13			
14а			
б			
15			
16а			
б			
17а			
б			
в			
г			
д			
18			
19			
20			
21а			
б			