

Примеры групп

- A11◊1. Перечислите все подгруппы в группах диэдров D_4 и D_6 .
- A11◊2. Покажите, что любая подгруппа циклической группы тоже циклическая.
- A11◊3. Наименьшее такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^n = e$ называется *порядком* элемента g и обозначается $\text{ord } g$.
Верно ли, что: а) $\forall n \in \mathbb{N} \text{ord}(g^n) = \text{ord}(g) / \text{нод}(n, \text{ord}(g))$ б) $fg = gf \Rightarrow \text{ord}(fg) \mid \text{нок}(\text{ord}(f), \text{ord}(g))$.
- A11◊4. Чему может быть равен $\text{ord}(fg)$, если $\text{ord}(gf) = n$?
- A11◊5. Все ли элементы нечётно порядка являются квадратами?
- A11◊6. Покажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.
- A11◊7. Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ число элементов порядка k в конечных группах G и H одинаково. Верно ли, что $G \simeq H$ для а) любых б) абелевых конечных групп G и H ?
- A11◊8. Что можно сказать о чётности порядка произвольной нечётной перестановки?
- A11◊9. Вычислите 100-ю степень перестановки $(3, 5, 4, 1, 2)$.
- A11◊10. Сколько элементов S_5 неподвижно при сопряжении перестановкой $(3, 5, 1, 2, 4)$?
- A11◊11. Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \text{Id}$. Верно ли, что а) перестановка является инволюцией, если и только если в её цикловом типе есть только циклы длины 1 и 2 б) любой цикл $\tau \in S_n$ длины ≥ 3 является композицией двух инволюций.
- A11◊12 (задача Н. Н. Константинова). В городе N разрешаются лишь простые двусторонние обмены квартир¹, причём в течение одного дня каждому жителю разрешается сделать не более одного обмена. Можно ли за два дня осуществить любой, сколь угодно сложный обмен²?
- A11◊13*. Можно ли в игре «15» осуществить транспозицию фишек «1» и «2» так, чтобы все остальные фишки в результате оказались в начальных своих положениях?
- A11◊14. Говорят, что группа G порождается элементами $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$, если любой элемент G является произведением элементов g_i (возможно, с повторениями). Порождается ли а) S_n циклами $|1, 2\rangle$ и $|1, 2, 3, \dots, n\rangle$? б) A_n циклами $|1, 2, 3\rangle, |1, 2, 4\rangle, \dots, |1, 2, n\rangle$?
- A11◊15. Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?
- A11◊16. Какие перестановки а) вершин тетраэдра б) диагоналей куба можно получить собственными движениями этих фигур?
- A11◊17. Найдите порядки собственной и несобственной групп а) пяти платоновых тел в \mathbb{R}^3 и правильных четырёхмерных б) куба в) кокуба³ г) симплекса⁴ д) октаплекса⁵.
- A11◊18. У каких платоновых тел полная группа изоморфна прямому произведению собственной группы на группу знаков $\{\pm 1\}$?
- A11◊19. При каких n и m группа диэдра D_{mn} изоморфна $D_m \times \mathbb{Z}/(n)$?
- A11◊20. Покажите, что множество *кватернионных единиц* $Q_8 = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$, которые перемножаются так, что e является единицей, «минус на минус даёт плюс», $i^2 = j^2 = k^2 = -e$ и $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$, образуют группу, и выясните, изоморфна ли она D_4 .
- A11◊21. Найдите все пары изоморфных групп в наборах: а) $D_8, D_4 \times \mathbb{Z}/(2), Q_8 \times \mathbb{Z}/(2)$
б) $S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(4), Q_8 \times \mathbb{Z}/(3), D_4 \times \mathbb{Z}/(3)$

¹когда A въезжает в квартиру, принадлежащую B , а B — в квартиру, принадлежащую A ; все более сложные обмены, скажем, когда A въезжает в квартиру, принадлежащую B , B — в квартиру, принадлежащую C , а уже C — в квартиру, принадлежащую A , запрещены

²т. е. произвольную биекцию из множества квартир в себя

³выпуклой оболочки концов векторов $\pm e_i$, где e_1, e_2, e_3, e_4 образуют стандартный базис в \mathbb{R}^4

⁴выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 в \mathbb{R}^5

⁵выпуклой оболочки вершин кокуба и вершин куба $|x_i| \leq c$, вписанного в единичную сферу с центром в нуле в \mathbb{R}^4

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3а			
б			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			
11а			
б			
12			
13			
14а			
б			
15			
16а			
б			
17а			
б			
в			
г			
д			
18			
19			
20			
21а			
б			