

Действия и гомоморфизмы

A12◊1. Найдите длины орбит всех точек каждого из платоновых тел под действием собственной и несобственной группы тела. Перечислите орбиты, длина которых меньше порядка группы.

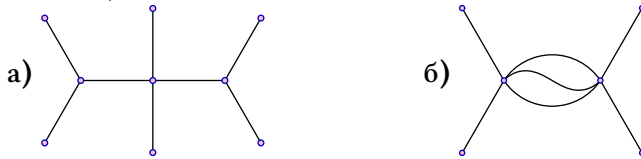
A12◊2. Собственная группа куба действует на множестве вершин V и множестве рёбер E этого куба. Опишите орбиты её диагонального¹ действия на а) $V \times V$ б) $V \times E$ в) $E \times E \times E$.

A12◊3. Симметрическая группа S_n стандартно действует на множестве $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Опишите орбиты диагонального действия S_n на X^m при $n \geq m$ (начните с $m = 2, 3, \dots$).

A12◊4. Конечная группа транзитивно действует на множестве, содержащем более одного элемента. Обязательно ли в группе есть элемент, действующий без неподвижных точек?

A12◊5. Имеется неограниченный запас неразличимых по длине и форме бусин n разных цветов. Сколько различных с виду ожерелий можно изготовить из а) 4 б) 7 в) 8 г) 9 бусин?

A12◊6. Имеется неограниченный запас неразличимых по длине и форме кусков верёвок n различных цветов. Сколько можно навязать из них разных с виду фенечек формы



A12◊7. Опишите орбиту двойного отношения² ϑ четвёрки различных точек на \mathbb{P}_1 под действием группы S_4 перестановок этих точек, и найдите все ϑ , орбиты которых короче общей.

A12◊8. Постройте изоморфизмы S_4 с а) несобственной группой тетраэдра б) собственной группой куба. в) Постройте эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$.

A12◊9. Найдите порядок группы а) $\text{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ б) $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$.

A12◊10. Постройте изоморфизмы A_4 с а) собственной группой тетраэдра б) $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$.

A12◊11. Постройте изоморфизмы A_5 с а) собственной группой додекаэдра б) $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ в) $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$.

A12◊12. Постройте изоморфизмы а) $\text{PSL}_3(\mathbb{F}_2) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ б) $A_6 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$.

A12◊13 (системы Штейнера). Набор S из k -элементных подмножеств n -элементного множества X называется *системой Штейнера* $S(t, k, n)$, если каждое t -элементное подмножество X содержится ровно в одном множестве из S . Мы полагаем $\text{Aut}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in S_n \mid \forall Y \in S \ g(Y) \in S\}$. а) По системе Штейнера $S(t, k, n)$ постройте систему $S(t - 1, k - 1, n - 1)$. б) Для всех $q = p^k$, где p – простое, постройте системы $S(2, q, q^2)$ и $S(2, q + 1, q^2 + q + 1)$. в*) Покажите, что образы множества $\{0, 1, 4, 9, 3, 5\}$ квадратов поля \mathbb{F}_{11} под действием группы $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_{11})$ дробно линейных преобразований проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{11}) = \{0, 1, \dots, 10, \infty\}$ составляют систему Штейнера $S(5, 6, 12)$ г*) Постройте систему Штейнера $S(5, 8, 24)$.

A12◊14*. Найдите порядки *спорадических простых групп Матвё*³ а) $M_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(S(4, 5, 11))$ б) $M_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(S(5, 6, 12))$ в) $M_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(S(3, 6, 22))$ г) $M_{23} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(S(4, 7, 23))$ д) $M_{24} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(S(5, 8, 24))$ и покажите, что M_{11}, M_{22} и M_{23} суть стабилизаторы точек естественных действий M_{12}, M_{23} и M_{24} .

A12◊15. Постройте изоморфизмы а) $\text{PGL}_3(\mathbb{F}_4) \simeq M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(S(2, 5, 21))$ б*) $A_6 \simeq [M_{10}, M_{10}]$, где $M_{10} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(S(3, 4, 10))$ и $[G, G] \subset G$ – подгруппа, порождённая коммутаторами $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

A12◊16. Опишите группу автоморфизмов группы а) $\mathbb{Z}/(n)$ б) $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ в) D_3 г) D_4 д) Q_8 .

A12◊17. У каких групп из предыдущей задачи все автоморфизмы являются внутренними?

A12◊18. Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе $\text{Aut}(A_5)$.

A12◊19*. Постройте внешний автоморфизм симметрической группы⁴ S_6 .

¹если G действует на множествах X_1, X_2, \dots, X_m , то *диагональное* действие G на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ происходит по правилу $g : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (gx_1, gx_2, \dots, gx_m)$

²двойное отношение $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a} \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ равно образу точки d при дробно линейном преобразовании $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, переводящем a, b, c в $\infty, 0, 1$

³подсказка: найдите в S_6 два различных класса сопряжённости, состоящие из одинакового числа элементов, и попытайтесь «переставить» их друг с другом под действием автоморфизма
 ответы: 7920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
6а			
б			
7			
8а			
б			
в			
9а			
б			
10а			
б			
11а			
б			
в			
12а			
б			
13а			
б			
в			
г			
14а			
б			
в			
г			
д			
15а			
б			
16а			
б			
в			
г			
д			
17			
18			
19			