

О строении групп

- A13◊1. Пусть произведение любых двух левых смежных классов некоторой подгруппы H также является левым смежным классом подгруппы H . Верно ли, что H нормальна?
- A13◊2. Две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Покажите, что их элементы коммутируют друг с другом.
- A13◊3. Во всякой ли группе чётного порядка есть элемент порядка 2?
- A13◊4. Известно, что любая подгруппа конечной группы G нормальна. Верно ли, что G абелева?
- A13◊5. Какие классы сопряжённости в S_n распадаются на несколько классов сопряжённости в A_n ? Перечислите классы сопряжённых элементов с указанием числа элементов в каждом классе для групп а) A_3 б) A_4 в) A_6 .
- A13◊6. Покажите, что группа A_n проста при $n \geq 5$.
- A13◊7 (простота группы SO_3). Рассмотрим группу $SO_3(\mathbb{R})$ всех вращений евклидова векторного пространства \mathbb{R}^3 и для каждой пары $v \in \mathbb{R}^3, \varphi \in \mathbb{R}$ обозначим через $R_{v,\varphi} \in SO_3(\mathbb{R})$ поворот вокруг оси, направленной вдоль вектора v , на угол φ по ЧС, если смотреть в направлении v . Покажите, что $FR_{v,\varphi}F^{-1} = R_{Fv,\varphi}$ для всех $F \in SO_3$, и выведите отсюда, что группа SO_3 проста.
- A13◊8 (полупрямые произведения). Пусть группа H действует на группе N посредством гомоморфизма групп $\psi : H \rightarrow \text{Aut } N, h \mapsto \psi_h : N \rightarrow N$. Зададим на декартовом произведении $N \times H$ операцию композиции правилом $(x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2) = (x_1\psi_{h_1}(x_2), h_1h_2)$. Проверьте, что:
- оно задаёт на $N \times H$ структуру группы (она называется *полупрямым произведением* групп N и H по действию ψ и обозначается $N \rtimes_{\psi} H$)
 - элементы вида (x, e) с $x \in N$ образуют в группе $G = N \rtimes_{\psi} H$ нормальную подгруппу N' , изоморфную N , и фактор $G/N' \simeq H$, а элементы вида (e, h) с $h \in H$ образуют подгруппу H' , такую что $N'H' = G$ и $N' \cap H' = \{e\}$.
 - Пусть действия $\varphi, \psi : H \rightarrow \text{Aut } N$ различаются на внутренний автоморфизм группы N , т. е. $\varphi = \text{Ad}_g \circ \psi$ для некоторого $g \in N$. Покажите, что $N \rtimes_{\psi} H \simeq N \rtimes_{\varphi} H$.
- A13◊9. Приведите пример двух неизоморфных групп G_1 и G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \triangleleft G_1$ и $H_2 \triangleleft G_2$, таких что $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.
- A13◊10. Докажите, что любая подгруппа, индекс которой равен наименьшему простому числу, делящему порядок группы нормальна (в частности, любая подгруппа индекса 2 нормальна, в группе нечётно порядка любая подгруппа индекса 3 нормальна и т. д.).
- A13◊11. Опишите все группы порядка pq , где p, q — такие простые, что: а) $p = q$ б) $p > q = 2$ в) $\text{нод}(p-1, q) = 1$ г) $p = 11, q = 5$.
- A13◊12. Перечислите все группы порядка ≤ 15 с точностью до изоморфизма.
- A13◊13. Пусть $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ — сюръективный гомоморфизм групп. Покажите, что полный прообраз $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$ любой нормальной подгруппы $N_2 \triangleleft G_2$ является нормальной подгруппой в G_1 и $G_1/N_1 \simeq G_2/N_2$.
- A13◊14. Пусть H — любая, а N — нормальная подгруппы некой группы. Покажите, что $H \cap N \triangleleft H$, $HN = NH$ является подгруппой, $N \triangleleft HN$ и $HN/N \simeq H/(H \cap N)$.
- A13◊15 (лемма о бабочке). Пусть четыре подгруппы A, B, C, D некой группы таковы, что $A \triangleleft B$ и $C \triangleleft D$. Покажите, что $(B \cap D)C / (A \cap D)C \simeq (B \cap D) / (A \cap D)(B \cap C) \simeq A(B \cap D) / A(B \cap C)$.
- A13◊16. Приведите пример группы с двумя композиционными рядами, факторы которых нетривиально переставлены друг относительно друга.
- A13◊17. Приведите пример двух неизоморфных групп с одинаковыми композиционными факторами Жордана-Гельдера.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9			
10			
11а			
б			
в			
г			
12			
13			
14			
15			
16			
17			