

Комплексные и вещественные пространства и эрмитовы формы

- A17◊1. Для n -мерного векторного пространства W над полем \mathbb{C} рассмотрим пространство $\text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ как вещественное векторное подпространство в вещественном векторном пространстве $\text{End}_{\mathbb{R}}(W)$. Найдите его коразмерность.
- A17◊2. Для комплексного векторного пространства W обозначим через \overline{W} векторное пространство, совпадающее с W как аддитивная абелева группа, но с умножением векторов на комплексные числа, заданным по формуле $z \cdot w \stackrel{\text{def}}{=} \bar{z} \cdot w$. Покажите, что \overline{W} является векторным пространством над полем \mathbb{C} , той же размерности, что и W и постройте канонический \mathbb{C} -линейный изоморфизм $W \oplus \overline{W}$ с комплексифицированным оеществлением $W_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.
- A17◊3. Для \mathbb{C} -линейного оператора $F : W \rightarrow W$ на комплексном векторном пространстве W обозначим через $F_{\mathbb{C}} : W_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow W_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ комплексификацию вещественно линейного оператора $F_{\mathbb{R}} : W_{\mathbb{R}} \rightarrow W_{\mathbb{R}}$ на оеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$. Выясните, как связаны друг с другом характеристические многочлены, собственные числа¹ и собственные векторы операторов F и $F_{\mathbb{C}}$. Если общий случай непонятен, начните с $W = \mathbb{C}$ (так что $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$) и $F : z \mapsto iz$.
- A17◊4. Постройте изоморфизм групп $U_n \cong O_{2n}(\mathbb{R}) \cap \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
- A17◊5. Приведите пример оператора на эрмитовом пространстве, имеющего инвариантное подпространство, ортогональное к которому не переводится оператором в себя.
- A17◊6. Докажите, что $(\ker F)^{\perp} = \text{im } F^*$.
- A17◊7. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ (сумма не обязательно ортогональная) и оператор F проектирует V на V_1 вдоль V_2 . Покажите, что $V = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$ и F^* проектирует V на V_2^{\perp} вдоль V_1^{\perp} .
- A17◊8. Введём на пространстве многочленов $\mathbb{R}[x, y, z]$ такое скалярное произведение, чтобы базисные мономы $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$ составляли ортогональный базис со скалярными квадратами $\alpha! \beta! \gamma!$.
- а) Найдите оператор, сопряженный оператору Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. б) Покажите, что подпространство S^m однородных многочленов степени m раскладывается в прямую сумму вида $S^m = H_m \oplus \varrho^2 \cdot H_{m-2} \oplus \varrho^4 \cdot H_{m-4} \oplus \dots$, где $H_m = \{f \in S^m \mid \Delta f = 0\}$ и $\varrho^2 \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2$.
- A17◊9. На пространстве гладких периодических функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом $T > 0$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^T f(x)g(x)dx$ вычислите операторы, сопряженные к оператору
- а) дифференцирования б) умножения на фиксированную гладкую T -периодическую функцию в) $L = a_k(x)\frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \dots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$ где a_0, a_1, \dots, a_k — заданные гладкие T -периодические функции.
- A17◊10 (теорема Шура). Докажите, что любой оператор на эрмитовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольной матрицей.
- A17◊11. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, имеющие различные собственные значения, ортогональны, и что любой ортонормированный набор собственных векторов можно дополнить до ортонормального базиса из собственных векторов.
- A17◊12. Покажите, что всякий обратимый оператор F в евклидовом векторном пространстве единственным образом раскладывается в композиции $F = S_1 I_1 = I_2 S_2$, где операторы I_{ν} ортогональны, а S_{ν} — самосопряжены и имеют положительные собственные числа.
- A17◊13. Докажите, что нормальность оператора F равносильна каждому из свойств: а) любой собственный вектор F собственный и для F^* б) $\forall v \in V \ |Fv| = |F^*v|$ в) ортогонален к любому F -инвариантному подпространству F -инвариантен г) всякое F -инвариантное подпространство F^* -инвариантно д) компоненты разложения F в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов перестановочны е) компоненты полярного разложения оператора F перестановочны.

¹обратите внимание, что характеристический многочлен оператора $F_{\mathbb{C}}$ имеет вдвое большую степень, чем характеристический многочлен оператора F , и собственных чисел у него, соответственно, тоже вдвое больше

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
9а			
б			
в			
10			
11			
12			
13а			
б			
в			
г			
д			
е			