Лекция 12 ноября (первая половина)

Ещё одно отличие модулей от векторных пространств:

V - векторное пр-во над полем $\Bbbk$

$U \subset V$ - подпространство

Всегда $\exists$ дополнительное подпр-во $W \subset V$:

$$V = U \oplus W \quad (\Leftrightarrow V = U + W \ \& \ U \cap W = 0).$$

$$v = u + w$$

Взять базис $u_1, \ldots, u_k$ в U, дополнить его до базиса $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m$ в V

$$W = \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_m) = \{x_1 w_1 + \ldots + x_m w_m$$

где $x_i \in \Bbbk$

линейная оболочка

Для модулей это не так: $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}$

имеет $\mathbb{Z}$-подмодуль $(2) = \mathbb{Z} \cdot 2$. У него нет дополнительного подмодуля!

$$\underline{M = N_1 \oplus N_2} \Rightarrow M/N_1 \cong N_2$$

$$[v]_{N_1} \leftarrow v \in N_2$$

Это сюръекция, т.к.

$$m = \underset{\substack{\uparrow \\ N_1}}{n_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ N_2}}{n_2} \qquad [m]_{N_1} = [n_2]_{N_1}$$

Это вложение, поскольку ядро — нулевое: $[n_2] = [0] \Rightarrow$

$n_2 \in N_1$ $\quad n_2 \in N_1 \cap N_2 = 0$

$\mathbb{Z} = 2\cdot\mathbb{Z} \oplus N \Rightarrow N \simeq \mathbb{Z}/(2)$

$\mathbb{Z}/(2)$ нельзя вложить в $\mathbb{Z}$, т.к. в $\mathbb{Z}$ нет кручения. $\quad 2\cdot[1]_2 = 0$

$$\varphi : \mathbb{Z}/(2) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

$$2\cdot \underline{\underline{\varphi([1]_2)}} = \varphi(2\cdot[1]_2) =$$
$$= \varphi(0) = 0$$

У подмодуля может не быть дополнительного подмодуля

Замечание: прямые суммы и прямые произведения.

Если есть семейство модулей M_ν, $\nu \in \omega$ можно построить декартово произведение

$$\underset{\uparrow}{\prod M_\nu} = \{ (m_\nu)_{\nu \in \omega} \mid m_\nu \in M_\nu \}$$

это тоже модуль с покоординатными

операциями:

$$(m_\nu) + (n_\nu) = (m_\nu + n_\nu)$$
$$x\cdot(m_\nu) = (xm_\nu)$$

$\prod M_\nu$ с такими операциями наз. прямым произведением модулей M_ν

$\bigoplus M_\nu \subset \prod M_\nu$ прямая сумма

$\uparrow$

состоит из семейств (m_ν), в которых только конечное число элементов $m_\nu \neq 0$

$\varphi : M \longrightarrow N$; M, N - это K-модули

φ наз. гомоморфизмом модулей или K-линейным отображением, если

$$\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$$
$$\varphi(xm) = x\varphi(m).$$

Предупреждение: "Школьная" линейная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ $x \longmapsto ax+b$ $\mathbb{R}$-линейна только при $b=0$.

$$\varphi(x_1+x_2) = a(x_1+x_2)+b \neq$$
$$\neq ax_1+b + ax_2+b$$

Если векторы $w_1, \dots, w_m$ порождают K-модуль M, и заданы значения $\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_m) \in N$, то $\exists$ не более одного K-линейного $\varphi : M \to N$: $\varphi(w_i)$ имеет заданное значение

$\forall \; v = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$

⊛ $\varphi(v) = \varphi(x_1 w_1 + \dots + x_m w_m) = \underline{x_1 \varphi(w_1) + \dots + x_m \varphi(w_m)}$

если $w_1, \dots, w_m$ – это базис в M, то такое φ существует при любом выборе векторов $\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_m)$ в N.

$v \longleftrightarrow \underbrace{x_1 w_1 + \dots + x_m w_2}$ это биекция

формула ⊛ корректно задаёт линейное отображение.

Если между $w_1, \dots, w_m$ есть линейное соотношение $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0$ и не все $\lambda_i = 0$

то формула $x_1 v_1 + \dots + x_m v_m \longmapsto \sum x_i \varphi(v_i)$ может быть некорректна!

$0 = 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_m \longmapsto 0$

$$0 = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m \longmapsto$$

$$\longmapsto \lambda_1 \varphi(w_1) + \ldots + \lambda_m \varphi(w_m)$$

если $\varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_m)$ не удовл. этому соотношению, то определение φ некорректно!

Примеры: $\mathbb{Z}$-линейные отображения

$$\mathbb{Z}/(m) \xrightarrow{\varphi} \underbrace{\mathbb{Z}/(n)}$$

$\uparrow$

порождается $[1]_m$, $[k]_m = k \cdot [1]_m$

$m \cdot [1]_m = 0$

$$0 = \varphi(0) = \varphi(m \cdot [1]_m) = m \cdot \underbrace{\varphi([1]_m)}$$

такого ненулевого вектора в $\mathbb{Z}/(n)$ может и не быть!

НОД$(m,n) = 1$ $\quad m \cdot [k]_n = 0$

$[m]_n [k]_n = 0$

$\exists\, [m]_n^{-1} \Rightarrow [k]_n = 0$

Факт: любой модуль является фактором свободного модуля по некоторому подмодулю.

Пусть M порождается семейством векторов w_ν, $\nu \in W$ (например, $\{w_\nu\} = M$).

обозначение для базисного вектор

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{\nu \in W} K_\nu \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
M
\end{tikzcd}$$

, где $K_\nu = K \cdot e_\nu$ свободный модуль ранга 1.

$\sum x_\nu e_\nu$

где только конечное число $x_\nu \neq 0$

$\downarrow$

$\sum x_\nu w_\nu$

$M \simeq \bigoplus K e_\nu / R$

$R - \ker \pi \leftarrow$ модуль соотношений

$\forall$ гомоморфизме модулей $N \xrightarrow{\varphi} M$

$\operatorname{im}\varphi \simeq N / \ker\varphi$ $\quad \varphi(n_1) = \varphi(n_2) \Leftrightarrow n_1 - n_2 \in \ker\varphi$

$\varphi(n) \leftarrow [n]$

$(x_\nu) \in \ker \pi \Leftrightarrow \sum x_\nu w_\nu = 0$

R состоит из коэфф-тов всех линейных соотношений между образующими w_ν

Факт 2: $M \supset N$ два k-модуля

$\forall$ модуля L $\quad \mathrm{Hom}_k(M/N, L) =$

$= \{\varphi : M \to L \mid \varphi|_N = 0\}$

Пример: $\mathrm{Hom}_k\left(\dfrac{\oplus k e_v}{R}, L\right)$

$$\|$$

$\varphi : \oplus k e_v \to L : \varphi|_R = 0$

φ задаётся образами векторов e_v, и эти образы могут быть произвольны

они не произвольны, а $\forall$ соотношение $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m = 0$ на образующие $w_1, \ldots w_m$ модуля $M = \oplus k e_v / R$, т.е. $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R$, должно выполняться соотношение

$\lambda_1 \varphi(w_1) + \ldots + \lambda_m \varphi(w_m) = 0$

Док-во факта:

$N \subset M$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, squiggly] & M/N \arrow[d, "\varphi"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

Сопоставим φ композицию $\varphi \circ \pi$

$$\mathrm{Hom}(M/N, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, L)$$

$$\underbrace{(\varphi : M/N \longrightarrow L)} \longmapsto \underline{\underline{\varphi \circ \pi}} : m \longmapsto \varphi([m]_N)$$

инъективно: $\forall\, m \ \ \varphi([m]_N) = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$

образ лежит среди таких отображений

$$\psi : M \longrightarrow L$$

что $\psi|_N = 0$: $\varphi \circ \pi : \underset{\underset{N}{\cap}}{n} \longmapsto \varphi(\underset{\underset{0}{\parallel}}{[n]_N}) = 0$

$$\mathrm{Hom}\left(\frac{M}{N}, L\right) \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{отображения} \\ M \xrightarrow{\psi} L : \psi|_N = 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{\Psi} : \frac{M}{N} \longrightarrow L \\ \quad [m]_N \longmapsto \psi(m) \end{array}} \longleftarrow (\psi : M \longrightarrow L)$$

$$[m_1] = [m_2] \Rightarrow \psi(m_1) = \psi(m_2)$$

$$m_2 = m_1 + \underset{\underset{N}{\cap}}{n} \Rightarrow \psi(m_2) = \psi(m_1 + n) = \psi(m_1) + \cancelto{0}{\psi(n)}$$

Факт 3: $M = \bigoplus_{\nu \in N} M_\nu$

$$\forall N \quad \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\nu\in N} M_\nu, N\Big) = \prod_{\nu\in N} \mathrm{Hom}(M_\nu, N).$$

$$\bigoplus \varphi_\nu : (m_\nu) \mapsto \sum_{\nu\in N} \varphi_\nu(m_\nu) \in N \longleftrightarrow \{\varphi_\nu : M_\nu \to N\}$$

конечное число $m_\nu \neq 0$

сумма конечна! почти все слагаемые $= 0$!

бесконечный набор гомом-в с бесконечным числом $\varphi_\nu \neq 0$

$$\varphi : \bigoplus M_\nu \longrightarrow N \longmapsto \varphi_\nu = \varphi\Big|_{M_\nu} : M_\nu \to N$$

$$\cup$$

$$M_\nu = (m_\alpha) : m_\alpha = 0 \text{ при } \alpha \neq \nu$$

Пример: $\Bbbk[x] \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$

в $\Bbbk[x]$ есть базис $1, x, x^2, \dots$

достаточно задать любую последовательность чисел $\underline{\varphi_i = \varphi(x^i)} \in \Bbbk$

$$\varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m) = a_0\underset{\varphi(1)}{\underset{\|}{\varphi_0}} + a_1\underset{\varphi(x)}{\underset{\|}{\varphi_1}} + \dots + a_m\underset{\varphi(x^m)}{\underset{\|}{\varphi_m}}$$

$$(\varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \rightsquigarrow \Phi(t) = \sum_{i\geq 0} \varphi_i t^i \in \Bbbk[[t]]$$

$$\boxed{\underset{\text{dgf}}{\mathrm{Hom}_{\Bbbk}}(\underset{\text{dgf}}{\Bbbk[x]}, \Bbbk) \simeq \underline{\Bbbk[[t]]}}$$

$$\varphi : f = \sum_{i=0} a_i x^i \longmapsto \sum_{i=0} a_i\varphi_i \longleftarrow \Phi = \sum \varphi_i t^i$$