Лекция 10 декабря (вторая половина)

Два модуля

где $p_i, q_i \in K$ простые

$$K^s \oplus \frac{K}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(p_n^{m_n})}$$

и

$$M = \boxed{K^t} \oplus \underbrace{\frac{K}{(q_1^{l_1})} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(q_a^{l_a})}}$$

изоморфны $\iff s = t,\ a = n$, и слагаемые можно так перенумеровать, что $\forall i\ \ m_i = l_i$ и $p_i = \mu_i q_i$, где $\mu_i \in K$ обратим.

Док-во: Надо охарактеризовать инвариантно (т.е. в терминах M) все слагаемые.

$$M = K^s \oplus \underbrace{\frac{K}{(\underline{p_1^{m_1}})} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(\underline{p_n^{m_n}})}}_{\mathrm{Tors}(M)}$$

$$\overset{\shortparallel}{\left\{ m \in M \mid \exists \underset{\neq 0}{\lambda} \in K : \lambda m = 0 \right\}}$$

кручение

$$K^S \simeq M / \mathrm{Tors}(M)$$

Любой модуль над кольцом главных идеалов явл. прямой суммой свободного модуля и модуля кручения и ранг свободного модуля это $\mathrm{rk}(M/\underset{\substack{\uparrow \\ \text{автоматически} \\ \text{свободен}}}{\mathrm{Tors}(M)})$

$$\boxed{s = \mathrm{rk}\, M / \mathrm{Tors}(M).}$$

част 2. Пусть M - модуль кручения

$$\overset{M}{\cong}\quad \frac{K}{(p_1^{k_1})} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(p_n^{k_n})}$$

Сумма всех факторов вида $\textcircled{\frac{K}{p^m}}$ с фиксированным простым $\underline{p}$.

$$\shortparallel$$

p-кручение $\mathrm{Tors}_p(M) := \{ v \in M \mid \exists k \in \mathbb{N} : p^k v = 0 \}$

q не ассоц. с p

$\frac{K}{(q^m)}$ умножение на p

$v \longmapsto pv$

биективно (p обратим $\mathrm{mod}(q^n)$)

обратное отображение

$v \longmapsto [p]_q^{-1} v$

умножение на p (а значит и на $p^2, p^3, \dots$)
не имеет ядра, т.е. $p^k v \neq 0$ для $v \neq 0$
из $K/(q^n)$.

Следствие: Любой модуль кручения над кольцом главных идеалов является прямой суммой своих подмодулей p-кручения $M = \bigoplus_p \mathrm{Tors}_p(M)$

Шаг 3 Если M - модуль p-кручения

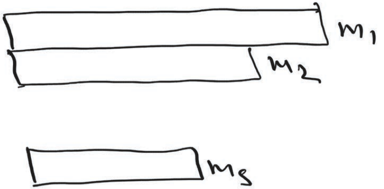
то в разложении

$$M = \frac{K}{(p^{m_1})} \oplus \frac{K}{(p^{m_2})} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(p^{m_s})}$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$$

показатели $m_1 \geq m_2 \dots \geq m_s$ не зависят от способа разложения.

Идея:



каждая строчка поставляет своё слагаемое диаграммы Юнга $(m_1, \dots, m_s)$ инвариантно характеризуется.

Рассмотрим умножение на p

$$\varphi : v \longrightarrow pv$$

$$\varphi : \frac{K}{(p^m)} \longrightarrow \frac{K}{(p^m)}$$

φ

φ^2

φ^3

$\vdots$

$\varphi^m = 0$

$$\underset{(p^{m-1})}{\overset{}{\ker\varphi}} \overset{}{\subset} \underset{(p^{m-2})}{\ker\varphi^2} \subset \ker\varphi^3 \subset \dots$$

$$\dots \subset \underset{K/(p^m)}{\underline{\ker\varphi^m}}$$

(под $\ker\varphi$, $\ker\varphi^2$ и $\ker\varphi^m$ стоят знаки $=$)

$$[x] = p^{m-1}[x'] \in K/(p^m)$$

$$\Updownarrow$$

$$p[x] = 0$$

$$\underset{(p^{m-k})/(p^{m-k+1})}{\ker\varphi^k/\ker\varphi^{k-1}} \simeq \begin{cases} K/(p) & \text{при } k = 1, 2, \dots, m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

__Факт:__ $\ker\varphi^k/\ker\varphi^{k-1}$ имеет структуру модуля над $K/(p)$.

$[v] \in \dfrac{K}{(p^m)}$

$[\lambda][v] = [\lambda v]$

$[\lambda] = K/(p)$.

правило корректно.

$$v \longmapsto v + \underset{\ker\varphi^{k-1}}{\underset{\in}{v'}}$$

$$\lambda \longmapsto \lambda + p\mu \qquad v \in \ker\varphi^k$$

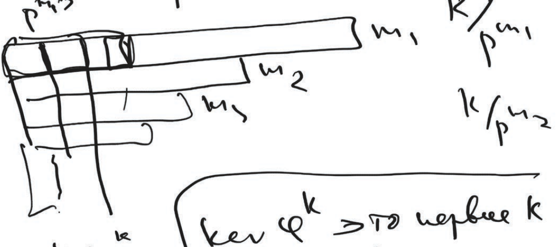
$$(\lambda + p\mu)(v + v') = \lambda v + \underbrace{p\overset{\varphi^k}{\boxed{\mu v}} + \boxed{\lambda v'} + \overset{\in \ker\varphi^{k-1}}{\boxed{p\mu v'}}}_{}$$

$\ker \varphi^{k-1}$

$K/(p)$ это поле.

$\frac{\ker \varphi^k}{\ker \varphi^{k-1}}$ — это векторное пр-во над $K/(p)$

$\dim \frac{\ker \varphi^k}{\ker \varphi^{k-1}}$ = высота k-того столбца диаграммы



$\ker \varphi^k$ это первые k столбцов

$\ker \varphi^{k-1}$ это первые $k-1$ столбцов

Обязательное задание 1 продумать последний шаг доказательства.

Пример 1 Строение конечно порождённых абелевых групп $(K = \mathbb{Z})$

Абелева группа = $\mathbb{Z}$-модуль.

Следствие: Каждая конечно порождённая абелева группа изоморфна аддитивной группе

$$\mathbb{Z}^r \oplus \frac{\mathbb{Z}}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{(p_n^{m_n})}$$

$\boxed{p_i \in \mathbb{N} \text{ - простые}}$

где слагаемые могут повторяться.

Две такие группы

$$\mathbb{Z}^r \oplus \frac{\mathbb{Z}}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{(p_n^{m_n})}$$

и

$$\mathbb{Z}^s \oplus \frac{\mathbb{Z}}{(q_1^{l_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{(q_k^{l_k})}$$

изоморфны $\Longleftrightarrow$ $r=s$, $n=k$ и слагаемые можно так перенумеровать, что

$q_i = p_i$, $m_i = l_i$ $\forall i$.

Каноническое разложение к.п. абелевой группы

Что означает теорема об инвариантных множителях для абелевых групп

$F \simeq \mathbb{Z}^n$ решётка

$\mathbb{Z}$-подмодуль $N \subset \mathbb{Z}^n$

факт 1 Это тоже решётка $N \simeq \mathbb{Z}^k$, $k \leq n$
если $k = \mathrm{rk}\, N = n$ то
подрешётки $N \subset \mathbb{Z}^n$ наз. соизмеримой с $\mathbb{Z}^n$

факт 2 в $\mathbb{Z}^n$ можно выбрать такой базис
$e_1, \dots, e_n$, что N будет
натянута на векторы
$\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_k e_k$ где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$
и $\lambda_1 | \lambda_2 | \lambda_3 \dots$

Следствие: $N \subset \mathbb{Z}^n$ соизмерим с $\mathbb{Z}^n \Leftrightarrow$

$\mathbb{Z}^n / N$ конечна

is

$$\mathbb{Z}/(\lambda_1) \oplus \mathbb{Z}/(\lambda_2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(\lambda_n)$$

$$\# \mathbb{Z}^n/N = |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n| = |\det D|$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$D = LCR$ где столбцы C – это какая-то система образующих для N

$L, R \in GL_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow \det L, \det R \in \mathbb{Z}$
обратимы
$|\det L| = |\det R| = 1$

$$|\det D| = |\det C|$$

Вывод: Столбцы целочисленной матрицы C порождают в $\mathbb{Z}^n$ подрешётку N, соизмеримую с $\mathbb{Z}^n \Leftrightarrow$
в этом случае
$\det C \neq 0$ и

$$\# \mathbb{Z}^n/N = |\det C|$$

число эл-тов в факторе по подрешётке равно объёму парал-да, натянутого на образующие подрешётки.

в четверг 17 декабря последняя лекция

в воскресенье 20 декабря в 11^{00} итоговый письменный экзамен.

О желании сдавать экзамен надо сообщить по электронной почте мне или тому, кто принимает у Вас задачи.

до 15^{00} надо прислать файлы с изображением решений тому, кто принимает у Вас задачи.