Векторные пространства и модули

А6◇1. Являются ли линейно зависимыми функции **а)** $\sin x, \sin^2 x, \dots, \sin^m x$ **б)** $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}$ в векторном пространстве всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$ и функции **в)** $x,\ x^2,\ \dots,\ x^{p+1}$ **г)** $x^p, x^{p^2}, \cdots, x^{p^p}$ в векторном пространстве всех функций $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ над полем $\mathbb{F}_p$?

А6◇2. Найдите количество k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве над $\mathbb{F}_q$ в виде рациональной функции от q и вычислите её предел при $q \to 1$.

А6◇3. Покажите, что множество 2^M всех подмножеств множества M с операциями $1 \cdot X \overset{\text{def}}{=} X$, $0 \cdot X \overset{\text{def}}{=} \varnothing$, $X + Y \overset{\text{def}}{=} (X \cup Y) \smallsetminus (X \cap Y)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$. Для m-элементного множества M найдите $\dim 2^M$ и выясните, может ли оказаться линейно зависимым набор таких подмножеств $X_1, \dots, X_n \subset M$, что $X_i \not\subseteq \bigcup_{\nu \neq i} X_\nu$ при каждом i.

А6◇4. Для произвольных векторных подпространств U, V, W любого векторного пространства положим $P = (U+V) \cap (V+W) \cap (W+U)$ и $Q = (U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U)$. Верно ли, что: **а)** $P \subseteq Q$ **б)** $P \supseteq Q$ **в)** для конечномерных U, V, W разность $\dim P - \dim Q$ чётна?

А6◇5. Пусть k-мерные векторные подпространства $V_1, \dots, V_n$ имеют $\dim V_i \cap V_j = k-1$ при всех $i \neq j$. Покажите, что существует либо $(k-1)$-мерное подпространство U, содержащееся во всех V_i, либо $(k+1)$-мерное подпространство W, содержащее все V_i.

А6◇6. Найдите размерность пространства **а)** многочленов $f \in \mathbb{R}[x]$ с $\deg f \leqslant n$ и $f(3-2i) = 0$ **б)** однородных симметрических[1] многочленов степени 7 от 4 переменных.

А6◇7. Образуют ли многочлены **а)** $(x+k)^n$ **б)** $\binom{x+k}{k} = (x+1)\cdots(x+k)/k!$ с $0 \leqslant k \leqslant n$ базис пространства $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени $\leqslant n$ над полем $\mathbb{Q}$?

А6◇8. Образуют ли многочлены из зад. А6◇7 (б) базис над $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$-подмодуле $M_n \subset \mathbb{Q}[x]_{\leqslant n}$, состоящем из многочленов, принимающих целые значения во всех целых точках?

А6◇9. Является ли $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{Z}[x]$, состоящий из всех многочленов с чётным свободным членом, **а)** конечно порождённым **б)** свободным **в)** отщепимым[2] прямым слагаемым?

А6◇10. Сколько различных разложений в прямую сумму двух циклических подгрупп у аддитивной абелевой группы $\mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(5)$?

А6◇11. Верно ли, что порождённый вектором $w = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}^m$ подмодуль $\mathbb{Z}w \subset \mathbb{Z}^m$ отщепляется прямым слагаемым если и только если $\text{НОД}(z_1, \dots, z_m) = 1$?

А6◇12. Пусть порядки[3] конечных подгрупп $A_1, \dots, A_n$ абелевой группы A взаимно просты. Докажите, что их сумма в A является прямой.

А6◇13. Модуль называется *полупростым*, если любой его собственный подмодуль отщепляется прямым слагаемым. Полупросты ли $\mathbb{Z}$-модули **а)** $\mathbb{Z}$ **б)** $\mathbb{Z}/(p^n)$ **в)** $\left(\mathbb{Z}/(p)\right)^n$?

А6◇14. Пусть фактор модуль $L = M/N$ свободен. Докажите, что $M \simeq N \oplus L$.

А6◇15 (проекторы). Пусть K-линейный эндоморфизм $f : M \to M$ имеет $f^2 = f$. Покажите, что $M = \ker f \oplus \operatorname{im} f$ и что f проектирует M на $\operatorname{im} f$ вдоль $\ker f$.

А6◇16. Справедливы ли для любого эндоморфизма $f : M \to M$ и всех $n \in \mathbb{N}$ импликации **а)** $\ker f^k = \ker f^{k+1} \Rightarrow \ker f^k = \ker f^{k+n}$ **б)** $\operatorname{im} f^k = \operatorname{im} f^{k+1} \Rightarrow \operatorname{im} f^k = \operatorname{im} f^{k+n}$?

А6◇17. Докажите, что для K-модулей $\operatorname{Hom}_K(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2) = \bigoplus_{i,j=1}^{2} \operatorname{Hom}_K(M_i, N_j)$.

А6◇18. Опишите $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}$-линейных гомоморфизмов $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)\big)$, когда **а)** $\text{НОД}(m,n) = 1$ **б)** $m = p^\mu$, $n = p^\nu$, где p простое **в)** m и n любые.

---

[1] Многочлен $f(x_1, \dots, x_m)$ называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных. Например, многочлен $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ симметрический, а $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ — нет.

[2] Подмодуль $N \subset M$ *отщепим* прямым слагаемым, если $M = N \oplus L$ для некоторого подмодуля $L \subset M$.

[3] *Порядком* конечной группы называется количество элементов в ней.

Персональный табель ____. **Листок № 6 (6 ноября 2020)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
2			
3			
4а			
б			
в			
5			
6а			
б			
7а			
б			
8			
9а			
б			
в			
10			
11			
12			
13а			
б			
в			
14			
15			
16а			
б			
17			
18а			
б			
в			