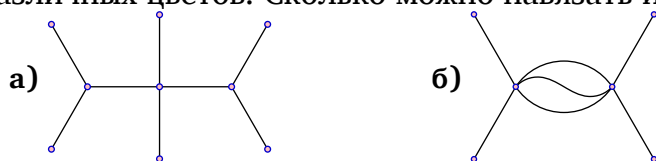


## Действия и гомоморфизмы групп

- A12♦1.** Найдите длину орбиты каждой точки каждого платонова тела под действием собственной и несобственной группы этого тела.
- A12♦2.** Собственная группа куба действует на множестве вершин  $V$  и множестве рёбер  $E$  этого куба. Опишите орбиты её диагонального<sup>1</sup> действия на а)  $V \times V$  б)  $V \times E$  в)  $E \times E \times E$ .
- A12♦3.** Симметрическая группа  $S_n$  стандартно действует на множестве  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Опишите орбиты диагонального действия  $S_n$  на  $X^m$  при  $n \geq m$  (начните с  $m = 2, 3, \dots$ ).
- A12♦4.** Конечная группа транзитивно действует на множестве, содержащем более одного элемента. Обязательно ли в группе есть элемент, действующий без неподвижных точек?
- A12♦5.** Имеется неограниченный запас неотличимых по форме бусин  $n$  разных цветов. Сколько различных ожерелий можно изготовить из а) 4 б) 7 в) 8 г) 9 бусин?
- A12♦6.** Имеется неограниченный запас неразличимых по длине и форме кусков веревок  $n$  различных цветов. Сколько можно навязать из них разных с виду фенечек формы



- A12♦7.** Какие значения принимает двойное отношение<sup>2</sup>  $\vartheta$  четырёх разных точек на  $\mathbb{P}_1$  под действием группы  $S_4$ , переставляющей эти точки? При каких  $\vartheta$  этих значений получится меньше, чем для общего  $\vartheta$ ?
- A12♦8.** Найдите порядок группы а)  $SL_n(\mathbb{F}_q)$  б)  $PGL_n(\mathbb{F}_q)$  в)  $PSL_2(\mathbb{F}_q)$ .
- A12♦9.** Постройте изоморфизмы  $A_4$  а) с собственной группой тетраэдра б) с  $PSL_2(\mathbb{F}_3)$ .
- A12♦10.** Изоморфна ли  $A_5$  а) собственной группе додекаэдра б)  $PGL_2(\mathbb{F}_4)$  в)  $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ ?
- A12♦11.** Постройте изоморфизмы а)  $GL_3(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_7)$  б)  $A_6 \simeq PSL_2(\mathbb{F}_9)$ .
- A12♦12.** Опишите группу автоморфизмов группы а)  $\mathbb{Z}/(n)$  б)  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$  в)  $D_3$  г)  $D_4$  д)  $Q_8$ .
- A12♦13.** У каких групп из предыдущей задачи все автоморфизмы являются внутренними?
- A12♦14.** Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе  $\text{Aut}(A_5)$ .
- A12♦15\*.** Постройте внешний автоморфизм симметрической группы<sup>3</sup>  $S_6$ .

**A12♦16 (системы Штейнера).** Набор  $S$  из  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества  $X$  называется *системой Штейнера*  $S(t, k, n)$ , если каждое  $t$ -элементное подмножество в  $X$  содержится ровно в одном множестве из  $S$ .

- а) По системе Штейнера  $S(t, k, n)$  постройте систему  $S(t - 1, k - 1, n - 1)$ .
- б) Для всех  $q = p^k$ , где  $p$  — простое, постройте системы  $S(2, q, q^2)$  и  $S(2, q + 1, q^2 + q + 1)$ .
- в\*) Покажите, что образы множества квадратов  $\{0, 1, 4, 9, 3, 5\}$  поля  $\mathbb{F}_{11}$  под действием группы  $PGL_2(\mathbb{F}_{11})$  дробно линейных преобразований проективной прямой  $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{11}) = \{0, 1, \dots, 10, \infty\}$  составляют систему Штейнера  $S(5, 6, 12)$ .
- г\*) Постройте систему Штейнера  $S(5, 8, 24)$ .

**A12♦17.** Положим  $\text{Aut}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in S_n \mid \forall Y \in S \ g(Y) \in S\}$ . Постройте изоморфизмы

- а)  $PGL_3(\mathbb{F}_4) \simeq \text{Aut}(S(2, 5, 21))$
- б\*)  $A_6 \simeq [\text{Aut}(S(3, 4, 10)), \text{Aut}(S(3, 4, 10))]$ , где коммутатор  $[G, G] \subset G$  — это подгруппа, порождённая коммутаторами  $[g, h] \stackrel{\text{def}}{=} ghg^{-1}h^{-1}$  всевозможных элементов  $g, h \in G$ .

<sup>1</sup> Если  $G$  действует на множествах  $X_1, \dots, X_m$ , то диагональное действие  $G$  на  $X_1 \times \dots \times X_m$  происходит по правилу  $g : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (gx_1, \dots, gx_m)$ .

<sup>2</sup> Двойное отношение  $[a, b, c, d] = \frac{a-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a} \in \mathbb{k} \setminus \{0, 1\}$  равно образу точки  $d$  при дробно линейном преобразовании  $\mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$ , переводящем  $a, b, c$  в  $\infty, 0, 1$ .

<sup>3</sup> Показано, что группа автоморфизмов  $S_6$  имеет внешний автоморфизм. См. например [1].