ПРОГРАММА ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ «АЛГЕБРА – 1»

ЗА ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР 2020/21 УЧЕБНОГО ГОДА

ТЕМА 1. Множества и отображения. Разбиения и факторизация. Диаграммы Юнга. Мультиномиальные коэффициенты. ЧУМы и вполне упорядоченные множества, лемма Цорна.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *подсчитывать количество разнообразных (биективных, инъективных, возрастающих, неубывающих, сюрьективных и т. п.) отображений из одного конечного множества в другое и уверенно применять этот навык в многочисленных текстовых задачах по комбинаторике, пользоваться диаграммами Юнга и их заполнениями, раскрывать скобки в выражении $(x_1 + \cdots + x_k)^m$, владеть трансфинитной индукцией и рекурсивными рассуждениями в стиле леммы Цорна.*

ТЕМА 2. Определения и терминология, относящиеся к полям, коммутативным кольцам и абелевым группам. Простейшие свойства гомоморфизмов абелевых групп, колец и полей. Прямые произведения абелевых групп и колец. Кольца и поля вычетов $\mathbb{Z}/(n)$. Китайская теорема об остатках, нод и взаимная простота в кольце целых чисел.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *устанавливать инъекивность гомоморфизма при помощи анализа его ядра, находить* н.о.д.$(a_1, \dots, a_n)$ *и представлять его в виде $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, свободно вычислять (складывать, вычитать, умножать и делить) в кольцах и полях $\mathbb{Z}/(m)$ и пользоваться этим умением для отыскания остатков и анализа диофантовых уравнений, применять китайскую теорему об остатках (в том числе в мультипликативных группах обратимых элементов колец $\mathbb{Z}/(m)$).*

ТЕМА 3. Многочлены и формальные степенные ряды, производная, обращение рядов, корни многочленов. Делимость и китайская теорема об остатках в кольце многочленов, кольца и поля вычетов $\Bbbk[x]/(f)$. Алгебраические расширения полей. Поле комплексных чисел. Простое подполе, характеристика, гомоморфизм Фробениуса. Конечные поля. Квадратичные вычеты.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *свободно вычислять (складывать, вычитать, умножать, делить, дифференцировать и интегрировать) в кольцах степенных рядов и многочленов, находить* н.о.д.$(f_1, \dots, f_n)$ *в $\Bbbk[x]$, где $\Bbbk$ — поле, и представлять его в виде $f_1h_1 + \cdots + f_nh_n$, находить кратность корня и анализировать наличие кратных корней у данного многочлена и общих корней у набора многочленов, свободно вычислять (складывать, вычитать, умножать и делить) в кольцах и полях $\Bbbk[x]/(f)$, в частности, в поле $\mathbb{C}$, быстро находить z^m и все $\sqrt[m]{z}$ в поле $\mathbb{C}$, пользоваться классификацией конечных полей (например, выяснять, когда одно конечное поле вкладывается в другое) и явно строить такие поля, пользоваться свойствами множества квадратов в $\mathbb{Z}/(p)$ для простых $p \in \mathbb{N}$.*

ТЕМА 4. Кольца частных, поле рядов Лорана, поле рациональных функций, разложение рациональных функций в сумму простейших дробей и в степенной ряд. Решение линейных рекуррентных уравнений. Экспонента, логарифм, бином (с произвольным показателем). Ряд Тодда и числа Бернулли, суммирование степеней.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *раскладывать рациональные функции в сумму простейших дробей и в степенной ряд и использовать это в практических вычислениях (в частности, для решения линейных рекуррентных уравнений), раскладывать в ряды элементарные функции (экспоненту, логарифм, бином с произвольным показателем), логарифмировать и экпоненцировать ряды, пользоваться действием $\Bbbk[\![d/dt]\!]$ на $\Bbbk[t]$..*

ТЕМА 5. Идеалы и фактор кольца. Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе идеала. Простые и максимальные идеалы. Кольца главных идеалов, пример: евклидовы кольца. Факториальные кольца, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *пользоваться евклидовостью колец $\Bbbk[x]$, $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ и $\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1)$, раскладывать на множители или устанавливать неприводимость многочленов с рациональными коэффициентами, пользоваться факториальностью кольца $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ в практических вычислениях.*

ТЕМА 6. Модули над коммутативными кольцами. Образующие и соотношения, примеры из мира решёток и абелевых групп. Фактор модуля по подмодулю и по идеалу кольца. Свободные модули, ранг. Пример: базисы векторных пространств, теоремы о размерностях сумм и пересечений векторных подпространств и слоёв линейных отображений между векторными пространствами.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *пользоваться образующими и соотношениями при описании гомоморфизмов модулей, выяснять, является ли данный набор векторов базисом данного модуля, строить базисы и находить размерности векторных пространств и подпространств, пользоваться теоремами о размерностях для решения практических задач.*

ТЕМА 7. Матричный формализм для линейных выражений наборов векторов друг через друга и для задания линейных отображений. Умножение матриц, обратимые матрицы. Ассоциативные кольца и алгебры, образующие алгебры матриц. Матрицы над ассоциативным кольцом, обращение унитреугольной матрицы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *эффективно пользоваться матричными обозначениями для выражения наборов векторов друг через друга и для описания линейных операторов, преобразовывать координаты вектора и матрицу оператора при замене систем образующих и базисов, преобразовывать строки и столбцы матрицы путём умножения этой матрицы с подходящей стороны на подходящую матрицу, пользоваться образующими и соотношениями в алгебре матриц при практических вычислениях (например, для обращения и вычисления степеней матриц вида $E + N$).*

ТЕМА 8. Модуль n-линейных кососимметричных форм на свободном модуле ранга n свободен ранга 1. Чётность и длина перестановки. Определитель, его полилинейность, кососимметричность, инвариантность при транспонировании и мультипликативность. Правила Крамера для решения неоднородных квадратных систем и однородных систем размера $(n-1)\times n$, формула для обратной матрицы и разложение определителя по набору строк. Присоединённая матрица и тождество Гамильтона – Кэли (многочлены с матричными коэффициентами = матрицы над кольцом многочленов). Грассмановы многочлены над коммутативным кольцом, соотношения Лапласа (разложение определителя по набору строк или столбцов).

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *вычислять определители и использовать их для решения систем линейных уравнений и обращения матриц, свободно вычислять с грассмановыми многочленами и использовать их для анализа определителей.*

ТЕМА 9. Конечно порождённые модули над кольцами главных идеалов: подмодуль свободного модуля свободен, диагонализация прямоугольной матрицы методом Гаусса, теоремы об элементарных делителях и об инвариантных множителях, каноническое разложение модуля в прямую сумму циклических. Примеры: строение конечно порождённых абелевых групп, решение линейных диофантовых уравнений, ранг подрешётки и число элементов в факторе решётки по соизмеримой подрешётке.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *диагонализовать прямоугольную матрицу над кольцом главных идеалов элементарными преобразованиями строк и столбцов и использовать это для решения (систем) линейных диофантовых уравнений, отыскания взаимных базисов свободного модуля и его подмодуля и вычисления инвариантных множителей подмодуля в свободном модуле, применять классификацию конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов (в частности, классификацию конечно порождённых абелевых групп) в разнообразных задачах (типа «описать все абелевы группы порядка 36» или «написать каноническое разложение для аддитивной группы* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big((\mathbb{Z}/(2))^5, \mathbb{Z}/(32)\big)$*»), строить взаимный базис решётки и подрешётки, находить число элементов в факторе решётки по подрешётке, находить порядки элементов в абелевой группе, заданной образующими и соотношениями.*