

## ПРОГРАММА ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ «АЛГЕБРА – 1»

### ЗА ВТОРОЙ СЕМЕСТР 2020/21 УЧЕБНОГО ГОДА

ТЕМА 1. Классификация пространств с операторами. Нильпотентные и полупростые операторы. Циклические векторы. Собственные подпространства, собственные значения и диагонализуемые операторы. Свойства коммутирующих операторов. Разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств по разложению аннулирующего многочлена на множители. Корневое разложение. Вычисление функций от матриц и операторов при помощи полиномиальной интерполяции.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *искать собственные числа и собственные и корневые подпространства линейного оператора, выяснять подобны ли два оператора, определять цикловой тип нильпотентного оператора, вычислять аналитические функции от матриц и операторов полиномиальной интерполяцией на спектре.*

ТЕМА 2. Группы преобразований и абстрактные группы. Примеры и свойства гомоморфизмов. Действие группы на множестве, длины и число орбит. Регулярное представление, смежные классы. Внутренние автоморфизмы, классы сопряжённости, нормальные подгруппы, фактор группы. Примеры: группы фигур, симметрические и знакопеременные группы, линейная, аффинная и проективная группы над конечными полями.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *эффективно вычислять в симметрической группе  $S_n$  (находить чётность и порядок перестановки, порядок её централизатора и т. п.) и в группах геометрической природы (группы многогранников, аффинная, проективная и полная линейная группа), находить количества орбит и их длины при действии группы на множестве, использовать свойства гомоморфизмов.*

ТЕМА 3.  $p$ -группы и теоремы Силова. Прямые и полупрямые произведения. Простые группы и теорема Жордана – Гёльдера. Свободные группы и задание групп образующими и соотношениями. Примеры групп, порождённых отражениями: группы платоновых тел, симметрическая группа (= полная группа правильного симплекса).

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *эффективно описывать группы небольших порядков и выяснять, изоморфны они или нет, знать их композиционные ряды, пользоваться представлением симметрической группы и групп многогранников образующими и соотношениями.*

ТЕМА 4. Пространство с билинейной формой (над любым полем): корреляции, ядро и ранг. невырожденные билинейные формы: соответствие между формами и операторами; двойственные базисы; ортогоналы, ортогональные разложения и ортогональные проекции; канонический оператор и классификация невырожденных билинейных форм над алгебраически замкнутым полем характеристики нуля.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *выяснять, являются ли две данные формы изометрически изоморфными (над алгебраически замкнутым полем), а также находить двойственные базисы относительно невырожденной формы и ортогональные проекции векторов на такие подпространства, куда форма ограничивается невырожденно.*

ТЕМА 5. Пространство со скалярным произведением (над любым полем): существование ортогонального базиса, разложение в прямую сумму анизотропного и гиперболического подпространств, ортогональная группа порождается отражениями и транзитивно действует на изотропных и гиперболических подпространствах заданной размерности. Квадратичные формы (над произвольным полем характеристики, отличной от двух): поляризация, классификация над полями  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{F}_q$ , отыскание индекса вещественной квадратичной формы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *приводить форму к сумме квадратов и раскладывать её в сумму гиперболической и анизотропной, выяснять размерность максимального изотропного и гиперболического подпространств, находить сигнатуру вещественных квадратичных форм и канонический вид квадратичной формы над конечным полем.*

ТЕМА 6. Симплектические пространства: существование базиса Дарбу, лагранжевы подпространства и антисамосопряжённые операторы. Симплектическая группа транзитивно действует на изотропных и лагранжевых подпространствах заданной размерности. Грассмановы квадратичные формы, критерий разложимости. Пфаффиан кососимметричной матрицы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить базис Дарбу кососимметричной формы, пользоваться свойствами симплектических линейных операторов, пфаффианом и грассмановыми многочленами, выяснять, разложима ли грассманова квадратичная форма.*

ТЕМА 7. Эрмитовы пространства: ортогонализация, длины, углы, объём, ортогональное проектирование, унитарная группа. Ортогональная диагонализация нормальных операторов, канонический вид самосопряжённых, антисамосопряжённых и унитарных операторов. SVD-разложение линейных отображений и полярное разложение невырожденного оператора. Экспоненциальное отображение. Комплексификация и о веществе, вещественный геометрический смысл комплексных собственных векторов. Эрмитово продолжение евклидовой структуры, канонический вид вещественных евклидово (анти) самосопряжённых и ортогональных операторов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить расстояния, углы и ортогональные проекции на подпространства в эрмитовом пространстве, находить диагональный вид нормальных операторов в ортонормальном базисе, находить сингулярные числа и сингулярные направления линейных операторов между эрмитовыми пространствами, находить компоненты полярного разложения невырожденного оператора на эрмитовом пространстве, находить канонический вид (анти)самосопряжённых и ортогональных операторов на евклидовом пространстве и двумерные инвариантные подпространства вещественных линейных операторов.*