Задачи для подготовки к контрольной № 7

ПК7◇1. Выясните, нормален ли оператор, имеющий в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^2$ матрицу

а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{9}+\frac{11i}{9} & \frac{8i}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9}+\frac{7i}{9} \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}-\frac{13i}{9} & \frac{14}{9}+\frac{2i}{9} \\ \frac{10}{9}-\frac{10i}{9} & -\frac{1}{3}-\frac{14i}{9} \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} \frac{4}{9}-\frac{11i}{9} & \frac{1}{3}-\frac{4i}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9}-\frac{7i}{9} \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2i}{3} & 2+\frac{2i}{3} \\ -\frac{2}{3}-2i & \frac{2}{3}+\frac{i}{3} \end{pmatrix}$,

и если да, приведите его к нормальным осям.

ответ в (а) и (в) операторы не нормальны (они не диагонализуемы), в (б) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} -\frac{2i}{3} & \frac{1}{3}-\frac{2i}{3} \\ -\frac{1}{3}-\frac{2i}{3} & \frac{2i}{3} \end{pmatrix}$ оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & -2-i \end{pmatrix}$, в (г) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{2i}{3} \end{pmatrix}$ оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$.

ПК7◇2. Найдите полярное разложение $F=SG$, где S самосопряжён и положителен, а $G \in \mathrm{U}_2$, для оператора $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу:

а) $\begin{pmatrix} -46/27-8i/9 & 20/27-38i/27 \\ -40/27-37i/27 & -44/27+2i/9 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -10/9+8i/9 & -22/9-2i/3 \\ 2-4i/9 & -5/9-2i/9 \end{pmatrix}$.

ответ в (а):

$$G = \begin{pmatrix} -2/3-2i/9 & 4/9-5i/9 \\ -4/9-5i/9 & -2/3+2i/9 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 22/9 & 4/9+2i/9 \\ 4/9-2i/9 & 23/9 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 23/54 & -2/27-i/27 \\ -2/27+i/27 & 11/27 \end{pmatrix}, \qquad FF^{\times} = \begin{pmatrix} 56/9 & 20/9+10i/9 \\ 20/9-10i/9 & 61/9 \end{pmatrix},$$

где FF^t имеет хар. многочлен $t^2-13t+36=(t-9)(t-4)$, в (б):

$$G = \begin{pmatrix} -1/3+2i/9 & -8/9-2i/9 \\ 8/9-2i/9 & -1/3-2i/9 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 26/9 & -2/9+2i/9 \\ -2/9-2i/9 & 19/9 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 19/54 & 1/27-i/27 \\ 1/27+i/27 & 13/27 \end{pmatrix}, \qquad FF^{\times} = \begin{pmatrix} 76/9 & -10/9+10i/9 \\ -10/9-10i/9 & 41/9 \end{pmatrix},$$

где $FF^{\times}$ имеет хар. многочлен $t^2-13t+36=(t-9)(t-4)$.

ПК7◇3. Найдите полярное разложение $F=GS$, где $G \in \mathrm{U}_2$, а S самосопряжён и положителен, для оператора $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу:

а) $\begin{pmatrix} -50/27-14i/27 & 2/3-16i/27 \\ -7/27-8i/9 & -70/27+26i/27 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1/27-2i/27 & 4/9+34i/27 \\ -20/27+2i & 35/27+38i/27 \end{pmatrix}$.

где $F^{\times}F$ имеет хар. многочлен $t^2-10t+9=(t-9)(t-1)$.

$$G = \begin{pmatrix} 1/3-10i/27 & 8/27+22i/27 \\ -8/27+22i/27 & 1/3+10i/27 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 17/9 & 4/9-8i/9 \\ 4/9+8i/9 & 19/9 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 19/27 & -4/27+8i/27 \\ -4/27-8i/27 & 17/27 \end{pmatrix}, \qquad F^{\times}F = \begin{pmatrix} 41/9 & 16/9-32i/9 \\ 16/9+32i/9 & 49/9 \end{pmatrix},$$

где $F^{\times}F$ имеет хар. многочлен $t^2-13t+36=(t-9)(t-4)$, в (б):

$$G = \begin{pmatrix} -8/9-8i/27 & 5/27-8i/27 \\ -5/27-8i/27 & -8/9+8i/27 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 19/9 & 2i(-1+i)/9 \\ -2/9+2i/9 & 26/9 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 13/27 & 1/27+i/27 \\ 1/27-i/27 & 19/54 \end{pmatrix}, \qquad F^{\times}F = \begin{pmatrix} 41/9 & -10/9-10i/9 \\ -10/9+10i/9 & 76/9 \end{pmatrix},$$

ответ в (а):

ПК7◇4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ приведите к нормальным осям грассмановы квадратичные формы:

а) $-\frac{8}{15}x_1\wedge x_2-\frac{8}{3}x_1\wedge x_3+\frac{94}{15}x_1\wedge x_4+\frac{56}{15}x_2\wedge x_3-\frac{8}{3}x_2\wedge x_4+\frac{8}{15}x_3\wedge x_4$
б) $-\frac{52}{27}x_1\wedge x_2-\frac{112}{27}x_1\wedge x_3-\frac{76}{27}x_1\wedge x_4-\frac{104}{27}x_2\wedge x_3+\frac{68}{27}x_2\wedge x_4-\frac{38}{27}x_3\wedge x_4$.

ответ в (а) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{7}{15} & -\frac{4}{15}\\ -\frac{8}{15} & \frac{1}{15} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{15}\\ -\frac{1}{15} & -\frac{8}{15} & \frac{4}{15} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{15} & \frac{4}{5} & \frac{4}{15} & \frac{7}{15}\end{pmatrix}$ форма имеет матрицу Грама имеет матрицу $\begin{pmatrix}0 & 8 & 0 & 0\\ -8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$, в (б) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix}-\frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{3}\\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & 0\end{pmatrix}$ форма имеет матрицу Грама имеет матрицу $\begin{pmatrix}0 & 4 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -6 & 0\end{pmatrix}$.

ПК7◇5. Существуют ли в $\mathbb{R}^2$ комплексная структура и такое эрмитово скалярное произведение, вещественная и мнимая части которого имеют в стандартном базисе матрицы Грама

а) $\begin{pmatrix}4 & -5\\ -5 & \frac{13}{2}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$? **б)** $\begin{pmatrix}\frac{16}{3} & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$?

в) $\begin{pmatrix}10 & 13\\ 13 & 20\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$? **г)** $\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$?

ответ в (а) да: оператор $I=G^{-1}\Omega=\begin{pmatrix}-5 & \frac{13}{2}\\ -4 & 5\end{pmatrix}$ имеет $I^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, в (б) нет: оператор $I=G^{-1}\Omega=\begin{pmatrix}-6 & -12\\ \frac{16}{5} & 6\end{pmatrix}$ имеет $I^2=\begin{pmatrix}-\frac{12}{5} & 0\\ 0 & -\frac{12}{5}\end{pmatrix}$, в (в) нет: оператор $I=G^{-1}\Omega=\begin{pmatrix}\frac{26}{31} & \frac{40}{31}\\ -\frac{20}{31} & -\frac{26}{31}\end{pmatrix}$ имеет $I^2=\begin{pmatrix}-\frac{4}{31} & 0\\ 0 & -\frac{4}{31}\end{pmatrix}$, в (г) да: оператор $I=G^{-1}\Omega=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ \frac{5}{2} & 3\end{pmatrix}$ имеет $I^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

ПК7◇6. Найдите $x,y\in\mathbb{H}$, удовлетворяющие системам уравнений:

а) $\begin{cases}(2-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\,x+(4+4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\,y=10+34\boldsymbol{i}-14\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\\ (-4+3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\,x+(-2-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\,y=11-47\boldsymbol{i}+26\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}\end{cases}$

б) $\begin{cases}(2+3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\,x+(-4-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\,y=-22-33\boldsymbol{i}+30\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k}\\ (-3-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\,x+(-1+4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\,y=-24+11\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+25\boldsymbol{k}\,.\end{cases}$

ответ в (а): $x=-2+2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $y=4+2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, в (б): $x=-4+\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $y=3+4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

ПК7◇7. В стандартном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ напишите матрицу оператора сопряжения кватернионом **а)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$ **б)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$ **в)** $-1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ и укажите ось и угол поворота, осуществляемого этим оператором.

ответ в (а) матрица $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, ось $\left(\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ -\sqrt{3}/3\right)$, угол $\frac{2\pi}{3}$, в (б) матрица $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, ось $\left(0,\ \sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2\right)$, угол π, в (в) матрица $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, ось $\left(-\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ -\sqrt{3}/3\right)$, угол $\frac{2\pi}{3}$.