§15. Комплексные и вещественные векторные пространства

15.1. Овеществление комплексного пространства. Каждое векторное пространство W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ одновременно является векторным пространством и над подполем вещественных чисел $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Когда комплексное векторное пространство W рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$, оно обозначается $W_{\mathbb{R}}$ и называется *овеществлением* комплексного пространства W. Если множество векторов $E \subset W$ является базисом пространства W над $\mathbb{C}$, то множество $E \sqcup iE$, состоящее из векторов e и ie, где $e \in E$, является базисом пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, поскольку существование и единственность представления произвольного вектора $w \in W$ в виде комплексной линейной комбинации

$$w = \sum\nolimits_e z_e e = \sum\nolimits_e (x_e + iy_e)\, e\,, \quad \text{где} \quad z_e = x_e + iy_e \in \mathbb{C}\,,$$

означает в точности существование и единственность линейного выражения

$$w = \sum\nolimits_e x_e e + \sum\nolimits_e y_e\, ie$$

вектора w через векторы e и ie с вещественными коэффициентами $x_e = \operatorname{Re} z_e$, $y_e = \operatorname{Im} z_e$. В частности, $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2\, \dim_{\mathbb{C}} W$, где для избежания недоразумений мы здесь и далее пишем $\dim_{\mathbb{R}}$ и $\dim_{\mathbb{C}}$ для обозначения размерности векторных пространств над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Обратите внимание, что вещественные векторные пространства, возникающие как овеществления комплексных, всегда чётномерны.

Комплексно линейные операторы $F : W \to W$ составляют алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ над полем $\mathbb{C}$, а вещественно линейные $G : W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ — алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ над полем $\mathbb{R}$, содержащую алгебру комплексно линейных эндоморфизмов в качестве подалгебры $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$. Сопоставление операторам из $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ и $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ их матриц, соответственно, в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над $\mathbb{C}$ и базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ отождествляет алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ с алгеброй $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера $n \times n$, а алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ — с алгеброй $\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $2n \times 2n$, которые мы будем записывать блочно:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{15-1}$$

согласно разбиению базиса $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ на части $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $i\boldsymbol{e} = (ie_1, \dots, ie_n)$.

Предложение 15.1 (условия Коши – Римана)
Вещественно линейный оператор (15-1) тогда и только тогда комплексно линеен, когда $C = -B$ и $D = A$. В базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над $\mathbb{C}$ такой оператор записывается комплексной $n \times n$-матрицей $A + iB$.

Доказательство. $\mathbb{C}$-линейность оператора F с матрицей (15-1) означает равенство $F(iw) = iF(w)$ для всех $w \in W_{\mathbb{R}}$, которое достаточно проверять на базисных векторах $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Но $F(i\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}B + i\boldsymbol{e}D$, а $iF(\boldsymbol{e}) = i(\boldsymbol{e}A + i\boldsymbol{e}C) = -\boldsymbol{e}C + i\boldsymbol{e}A$, откуда $B = -C$ и $D = A$. □

Пример 15.1 (комплексно дифференцируемые функции)
Рассмотрим одномерное комплексное пространство $W = \mathbb{C}$ со стандартным базисным вектором $e = 1$. Его овеществление $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ имеет базис $(e, ie) = (1, i)$. Каждый комплексно линейный

оператор $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является умножением на некое комплексное число $z = a + ib$ и в базисе $(1, i)$ записывается 2×2-матрицей
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Произвольная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w = f(z)$, одной переменной $z \in \mathbb{C}$, представляет собою отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и может быть задана парой вещественных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ от двух вещественных переменных x, y, связанных с комплексными переменными z, w по формулам $w = u + iv$, $z = x + iy$. Функция f называется *комплексно дифференцируемой* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если её приращение как функции от z имеет вид
$$f(z_0 + \vartriangle z) = f(z_0) + \zeta \cdot \vartriangle z + o(\vartriangle z), \text{ где } \zeta \in \mathbb{C}.$$
Функция f называется *вещественно дифференцируемой*, если
$$\begin{pmatrix} u(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \\ v(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} + o(\vartriangle x, \vartriangle y), \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$
Из курса анализа известно, что линейные операторы, описывающие линейную часть приращения, в обоих случаях выражаются через производные:
$$\zeta = f'(z_0) = \lim_{\vartriangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \vartriangle z) - f(z_0)}{\vartriangle z}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{g(x_0 + \vartriangle x, y_0) - g(x_0, y_0)}{\vartriangle x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\vartriangle y \to 0} \frac{g(x_0, y_0 + \vartriangle y) - g(x_0, y_0)}{\vartriangle y}.$$
Из предл. 15.1 вытекает, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно дифференцируемую функцию $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, когда эти функции удовлетворяют дифференциальным *уравнениям Коши – Римана*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

15.2. Комплексификация вещественного пространства. Каждое векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ канонически расширяется до векторного пространства $V_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ над $\mathbb{C}$, которое называется *комплексификацией* пространства V. Умножение разложимого тензора $c \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$ на комплексное число $z \in \mathbb{C}$ задаётся правилом $z\,(c \otimes v) = (zc) \otimes v$, которое корректно продолжается до $\mathbb{R}$-линейного отображения $z : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, $w \mapsto zw$, линейно зависящего от $z \in \mathbb{C}$.

Упражнение 15.1. Убедитесь в этом.

Поскольку числа $1, i \in \mathbb{C}$ составляют базис поля $\mathbb{C}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$, каждый вектор $w \in V_{\mathbb{C}}$ однозначно записывается в виде $w = 1 \otimes u + i \otimes v$, где $u, v \in V$. Векторы вида $1 \otimes v$, где $v \in V$, называются *вещественными* и образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, изоморфное исходному пространству V. Они составляют вещественное векторное подпространство в $V_{\mathbb{C}}$, которое обозначается через $V \subset V_{\mathbb{C}}$. Векторы вида $i \otimes v$, где $v \in V$, называются *чисто мнимыми*. Они тоже образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, также изоморфное исходному пространству V. Рассматриваемое как вещественное векторное подпространство в $V_{\mathbb{C}}$, оно обозначается через $iV \subset V_{\mathbb{C}}$. Таким образом, как векторное пространство над $\mathbb{R}$, пространство $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ является прямой суммой двух копий векторного пространства V. По этой причине векторы $w = 1 \otimes u + i \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$, где $u, v \in V$, обычно записывают как $w = u + iv \in V \oplus iV$, где $u \in V$ и $iv \in iV$, называются *вещественной* и *мнимой* частями вектора $w \in V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$. В этих обозначениях умножение вектора $w = u + iv$ на комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ задаётся той же формулой $(x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$, что и умножение в поле $\mathbb{C}$.

Упражнение 15.2. Убедитесь в этом.

Каждый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V над полем $\mathbb{R}$, рассматриваемый как набор вещественных векторов в $V_{\mathbb{C}}$, является базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$, поскольку единственность представления векторов $v_1, v_2 \in V$ в виде $v_1 = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $v_2 = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ с $x_\nu, y_\nu \in \mathbb{R}$ равносильна единственности представления вектора $w = v_1 + iv_2 \in V \oplus iV$ в виде

$$w = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n\,, \text{ где } z_\nu = x_\nu + iy_\nu \in \mathbb{C}\,.$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

15.2.1. Комплексное сопряжение. На пространстве $V_{\mathbb{C}}$ имеется $\mathbb{R}$-линейная инволюция

$$\sigma: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}\,, \quad w = v_1 + iv_2 \mapsto \overline{w} \stackrel{\text{def}}{=} v_1 - iv_2\,,$$

которая называется *комплексным сопряжением*. По построению, $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$, и вещественные подпространства V и iV являются её собственными подпространствами с собственными числами $+1$ и -1 соответственно. По отношению к умножению на комплексные числа инволюция σ *полулинейна*, т. е. удовлетворяет для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w \in V_{\mathbb{C}}$ соотношению $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$.

15.2.2. Комплексификация операторов. Каждый $\mathbb{R}$-линейный оператор $F: V' \to V''$ между вещественными векторными пространствами продолжается до $\mathbb{C}$-линейного оператора

$$F_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} F: V'_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V' \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V'' = V''_{\mathbb{C}}$$

который называется *комплексификацией* оператора F и действует по правилу

$$F_{\mathbb{C}}(u + iv) = F(u) + iF(v)\,, \text{ где } u + iv \in V' \oplus iV' = V'_{\mathbb{C}}\,.$$

Упражнение 15.3. Убедитесь в этом.

Оператор $F_{\mathbb{C}}$ коммутирует с комплексным сопряжением: для каждого $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$

$$\overline{F_{\mathbb{C}} w} = \overline{F_{\mathbb{C}}(u + iFv)} = \overline{Fu + iFv} = Fu - iFv = F_{\mathbb{C}}(u - iv) = F(\overline{w})\,. \tag{15-2}$$

Поэтому вектор $w \in V_{\mathbb{C}}$ собственный для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным числом $\lambda \in \mathbb{C}$ если и только если сопряжённый вектор $\overline{w}$ собственный для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным числом $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$: равенства $Fw = \lambda w$ и $F\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$ комплексно сопряжены друг другу в силу (15-2).

Предложение 15.2

Комплексная линейная оболочка $W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(w, \overline{w}) \subset V_{\mathbb{C}}$ пары сопряжённых собственных векторов $w = v_1 + iv_2$ и $\overline{w} = v_1 - iv_2$ оператора $F_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ с сопряжёнными собственными числами $\lambda = a + ib$ и $\overline{\lambda} = a - ib$ является комплексификацией вещественного инвариантного подпространства $U = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset V$ оператора $F: V \to V$, и ограничение $F|_U : U \to U$ имеет в образующих (v_1, v_2) матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\,. \tag{15-3}$$

Доказательство. Равенство $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2)$ означает, что

$$F(v_1) + iF(v_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2)\,,$$

откуда $F(v_1) = av_1 - bv_2$, $F(v_2) = bv_1 + av_2$. Тем самым, оператор F переводит вещественное подпространство $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$ в себя и имеет в нём матрицу (15-3). Комплексификация $U_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(v_1, v_2)$ содержит векторы $w = v_1 + iv_2$, $\overline{w} = v_1 - iv_2$ и линейно порождается ими над $\mathbb{C}$, ибо $v_1 = (w + \overline{w})/2$, $v_2 = (w - \overline{w})/2i$. □

Следствие 15.1 (Ср. с предл. 9.9)
Каждый $\mathbb{R}$-линейный оператор на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством. □

Замечание 15.1. Для вещественного собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ предл. 15.2 утверждает, что все комплексные собственные векторы оператора $F_{\mathbb{C}}$ лежат в комплексификации $\mathbb{C} \otimes V_\lambda \subset V_{\mathbb{C}}$ вещественного собственного подпространства $V_\lambda \subset V$ оператора F. Так как при $u, w \in V$ равенство $F_{\mathbb{C}}(u + iw) = Fu + iFw = \lambda(u + iw)$ равносильно равенствам $Fu = \lambda u$, $Fw = \lambda w$, мы заключаем, что отвечающее вещественному собственному числу λ собственное подпространство оператора $F_{\mathbb{C}}$ совпадает с $\mathbb{C} \otimes V_\lambda$.

Замечание 15.2. В любом вещественном базисе $e_1, \dots, e_n \in V$ пространства $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$ операторы F и $F_{\mathbb{C}}$ имеют одну и ту же вещественную матрицу. Поэтому их характеристические многочлены тоже одинаковы и вещественны: $\chi_F(t) = \chi_{F_{\mathbb{C}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$. В частности, невещественные собственные числа оператора $F_{\mathbb{C}}$ разбиваются на пары комплексно сопряжённых, имеющих одинаковые кратности, что согласуется с предл. 15.2. Это разбиение распространяется и на элементарные делители операторов F и $F_{\mathbb{C}}$. Напомню, что по теор. 9.1 на стр. 145 каждый вещественно линейный оператор F подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец

$$\mathbb{R}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)\,,\ \text{где } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \mathbb{R}[t]/\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)\,,\ \text{где } a, b \in \mathbb{R} \text{ и } b^2 < a\,.$$

Предложение 15.3
Каждый элементарный делитель вида $(t - \lambda)^m$ оператора F является элементарным делителем оператора $F_{\mathbb{C}}$, а каждому элементарному делителю вида $(t^2 - 2bt + a)^m$, оператора F отвечают два сопряжённых элементарных делителя $(t - \mu)^m$ и $(t - \overline{\mu})^m$, где $\mu = b + i\sqrt{a - b^2} \in \mathbb{C}$ оператора $F_{\mathbb{C}}$, и никаких других элементарных делителей у $F_{\mathbb{C}}$ нет.

Доказательство. Из прим. 13.8 на стр. 219 вытекает, что в условиях предложения

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{\big((t-\lambda)^m\big)} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\lambda)^m\big)} \quad \text{и} \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\mu)^m\big)} \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\overline{\mu})^m\big)}\,.$$

Поэтому оператор $F_{\mathbb{C}}$ подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец, полученной заменой каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ слагаемым $\mathbb{C}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$, а каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)$ — суммой $\mathbb{C}[t]/\big((t-\mu)^m\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t-\overline{\mu})^m\big)$. □

Следствие 15.2
Для каждого вещественного собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$ комплексификации

$$\mathbb{C} \otimes V_\lambda,\ \mathbb{C} \otimes K_\lambda \subset \mathbb{C} \otimes V$$

собственного и корневого подпространств $V_\lambda, K_\lambda \subset V$ оператора F являются, соответственно, собственным и корневым подпространствами оператора $F_\mathbb{C}$. □

Следствие 15.3
Для каждого невещественного собственного числа $\lambda \in \mathrm{Spec}(F_\mathbb{C})$ комплексное сопряжение

$$V_\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V_\mathbb{C}\,, \quad w \mapsto \overline{w}\,,$$

задаёт $\mathbb{C}$-полулинейные изоморфизмы $K_\lambda \xrightarrow{\sim} K_{\overline{\lambda}} = \overline{K}_\lambda$ и $V_\lambda \xrightarrow{\sim} V_{\overline{\lambda}} = \overline{V}_\lambda$ между корневыми и собственными подпространствами оператора $F_\mathbb{C}$ с сопряжёнными собственными числами λ и $\overline{\lambda}$, а прямые суммы $K_\lambda \oplus K_{\overline{\lambda}}$ и $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$ являются комплексификациями вещественных F-инвариантных подпространств оператора F. □

15.2.3. Комплексификация билинейной формы. Точно также как и линейный оператор, каждую вещественно билинейную форму $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ можно продолжить до *комплексно билинейной* формы $\beta_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, значения которой на векторах $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2 \in V_\mathbb{C}$ вычисляются по правилу

$$\beta_\mathbb{C}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \overset{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)\big)\,.$$

Упражнение 15.4. Покажите, что $\mathbb{C}$-билинейное продолжение $\beta_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$-билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е. $\overline{\beta_\mathbb{C}(w_1, w_2)} = \beta_\mathbb{C}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_\mathbb{C}$.

Матрица Грама формы $\beta_\mathbb{C}$ в любом вещественном базисе пространства $V_\mathbb{C}$ совпадает с матрицей Грама формы β в том же базисе. Если форма β симметрична или кососимметрична, то такова же и её комплексификация $\beta_\mathbb{C}$. Обратите внимание, что классифицирующий вещественные симметричные билинейные формы инвариант — сигнатура[1] — после комплексификации утрачивается, поскольку все комплексно билинейные формы заданного ранга изометрически изоморфны[2] друг другу над полем $\mathbb{C}$. В частности, $\mathbb{C}$-билинейная комплексификация евклидова скалярного произведения представляет собою невырожденную форму, имеющую комплексные изотропные подпространства[3] размерности $[\dim V/2]$.

15.2.4. Полуторалинейное продолжение билинейной формы. В метрической геометрии вместо $\mathbb{C}$-билинейного продолжения вещественной билинейной формы $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ на комплексификацию $V_\mathbb{C}$ пространства V обычно используется *полуторалинейное* или *эрмитово* продолжение $\beta_\mathrm{H} : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которое $\mathbb{C}$-линейно по первому аргументу и полулинейно[4] по второму. Это означает, что $\beta_\mathrm{H}(zw_1, w_2) = z\beta_\mathrm{H}(w_1, w_2)$, но $\beta_\mathrm{H}(w_1, zw_2) = \overline{z}\beta_\mathrm{H}(w_1, w_2)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w_1, w_2 \in V_\mathbb{C}$. Значение такой формы на векторах $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2 \in V_\mathbb{C}$ равно

$$\beta_\mathrm{H}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \overset{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)\big)\,. \qquad (15\text{-}4)$$

[1] См. раздел 14.5 на стр. 190 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

[2] См. следствие 13.1 на стр. 181 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf.

[3] См. раздел 13.2.2 на стр. 174 той же лекции.

[4] См. раздел 2.1.3 на стр. 23 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_02.pdf.

Упражнение 15.5. Покажите, что полуторалинейное продолжение $\beta_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$-билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е. $\overline{\beta_{\mathrm{H}}(w_1, w_2)} = \beta_{\mathrm{H}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$.

Если $\mathbb{R}$-билинейная форма $g : V \times V \to \mathbb{R}$ симметрична, то вещественная часть её эрмитова продолжения $\operatorname{Re} g_{\mathrm{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(u_1, u_2) + g(v_1, v_2)$ является симметричной $\mathbb{R}$-билинейной формой $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, а мнимая часть $\operatorname{Im} g_{\mathrm{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(v_1, u_2) - g(u_1, v_2)$ кососимметрична. Поэтому эрмитово продолжение симметричной формы при перестановке аргументов сопрягается: $g_{\mathrm{H}}(w_2, w_1) = \overline{g_{\mathrm{H}}(w_1, w_2)}$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$. Это свойство называют *эрмитовой симметричностью*. В частности, эрмитов скалярный квадрат любого вектора веществен: $g_{\mathrm{H}}(w, w) = \overline{g_{\mathrm{H}}(w, w)} \in \mathbb{R}$ для всех $w \in V_{\mathbb{C}}$.

Если $\mathbb{R}$-билинейная форма $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ кососимметрична, то наоборот $\mathbb{R}$-билинейная форма $\operatorname{Re} \omega_{\mathrm{H}}$ кососимметрична, а $\operatorname{Im} \omega_{\mathrm{H}}$ симметрична. Поэтому скалярные квадраты всех векторов относительно эрмитово продолженной формы ω_{H} чисто мнимы: для всех $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$

$$\omega_{\mathrm{H}}(w, w) = 2i\, \omega(u, v) \in i\mathbb{R}\,.$$

Пример 15.2 (эрмитово продолжение евклидовой структуры)
Рассмотрим вещественное векторное пространство V с евклидовым скалярным произведением[1] $(\,*\,,\,*\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ и его эрмитово продолжение $(\,*\,,\,*\,)_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ на комплексификацию $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ пространства V. Форма $(\,*\,,\,*\,)_{\mathrm{H}}$ эрмитово симметрична, вещественно билинейна, комплексно полуторалинейна и *положительна* в том смысле, что $(w, w)_{\mathrm{H}} > 0$ для всех ненулевых $w \in V_{\mathbb{C}}$. Абстрактное комплексное векторное пространство W, оснащённое формой $(\,*\,,\,*\,) : W \times W \to \mathbb{C}$ с такими свойствами, называется *эрмитовым*, а сама форма — *эрмитовым скалярным произведением* или *эрмитовой структурой* на W.

Например, комплексификацией вещественного координатного пространства $V = \mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой структурой $(x, y) = \sum x_\nu y_\nu$ является комплексное координатное пространство $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ с эрмитовой структурой $(z, w)_{\mathrm{H}} = \sum z_\nu \overline{w}_\nu$, которая называется *стандартной* эрмитовой структурой на $\mathbb{C}^n$.

Аналогично, комплексификацией пространства $C^0([a, b], \mathbb{R})$ вещественных непрерывных функций на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с евклидовым скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t)\, dt \tag{15-5}$$

является пространство $C^0([a, b], \mathbb{C})$ непрерывных функций $[a, b] \to \mathbb{C}$ с эрмитовой структурой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g}(x)\, dx\,, \tag{15-6}$$

где под интегралом от комплекснозначной функции f по определению понимается комплексное число

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\, dx\,,$$

действительная и мнимая части которого равны интегралам от вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : [a, b] \to \mathbb{R}$ функции f.

[1] См. определение 3.1 на стр. 33 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf.

15.3. Вещественные структуры на комплексном пространстве. Рассмотрим произвольное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}$-линейная $\mathbb{C}$-полулинейная[1] инволюция[2]

$$\sigma : W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}} \tag{15-7}$$

называется *вещественной структурой* или *оператором комплексного сопряжения* на пространстве W. Например, если пространство $W = V_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией вещественного векторного пространства V, то комплексное сопряжение $\sigma : W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}, w = u+iv \mapsto \overline{w} = u-iv$, является вещественной структурой на W.

Если на комплексном векторном пространстве W задана вещественная структура (15-7), то, как мы видели в прим. 9.3 на стр. 158, вещественное векторное пространство $W_{\mathbb{R}} = V_+ \oplus V_-$ распадается в прямую сумму собственных подпространств

$$V_+ = \{w \in W_{\mathbb{R}} \mid \sigma w = w\} \quad \text{и} \quad V_- = \{w \in W_{\mathbb{R}} \mid \sigma w = -w\}$$

оператора σ с собственными числами $+1$ и -1. Из $\mathbb{C}$ полулинейности оператора σ вытекает, что равенство $\sigma(u) = u$ влечёт равенство $\sigma(iu) = -i\sigma(u) = -iu$, а равенство $\sigma(v) = -v$ влечёт равенство $\sigma(-iv) = i\sigma(v) = -iv$, т. е. $\mathbb{R}$-линейные операторы умножения на i и на $-i$ задают взаимно обратные изоморфизмы между вещественными векторными пространствами V_+ и V_-:

$$i : V_+ \to V_- , \ u \mapsto iu , \qquad -i : V_+ \to V_- , \ v \mapsto -iv .$$

Таким образом, $W_{\mathbb{R}} = V \oplus iV$, где $V = V_+$, $iV = V_-$, а умножение вектора $w = u + iv \in W$ на комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ происходит по той же формуле

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) ,$$

что в комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ вещественного векторного пространства $V = V_+$. Мы заключаем, что задание на комплексном векторном пространстве W вещественной структуры σ равносильно отождествлению этого пространства с комплексификацией $W = \mathbb{C} \otimes V_+$ вещественного векторного пространства $V_+ = \{u \in W \mid \sigma(w) = w\}$ неподвижных векторов оператора σ.

По этой причине собственные подпространства V_+ и V_- вещественной структуры σ называются пространствами *вещественных* и *чисто мнимых* векторов этой структуры.

Подчеркнём, что на абстрактном векторном пространстве W над полем $\mathbb{C}$ имеется много разных вещественных структур, и никакого естественного предпочтения между ними *a priori* не существует, т. е. у абстрактного комплексного вектора нет канонически определённых «вещественной» и «мнимой» частей, они появляются только тогда, когда на пространстве W фиксируется какая-нибудь (одна из многих) вещественная структура.

Пример 15.3 (эрмитово сопряжение матриц)
На пространстве комплексных матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ имеется вещественная структура

$$\times : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) , \quad M \mapsto M^{\times} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M}^t ,$$

сопоставляющее матрице $M = (m_{ij})$ комплексно сопряжённую к транспонированной матрице M^t матрицу $M^{\times} = (m^{\times}_{ij})$ с элементами $m^{\times}_{ij} = \overline{m}_{ji}$. Вещественное подпространство V_+ этой структуры обозначается

$$\mathrm{Mat}^+_n(\mathbb{C}) = \{M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid m_{ij} = \overline{m}_{ji}\}$$

[1] Т. е. обладающая для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w \in W$ свойством $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$.
[2] Т. е. обратное самому себе отображение.

и называется пространством *эрмитовых матриц*, а мнимое подпространство V_- обозначается

$$\mathrm{Mat}_n^-(\mathbb{C}) = \{M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid m_{ij} = -\overline{m}_{ji}\}$$

и называется пространством *анти-* или *косоэрмитовых матриц*. Это *вещественные* (не комплексные!) векторные подпространства в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ вещественной размерности n^2, и как вещественное векторное пространство $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} = \mathrm{Mat}_n^+(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_n^-(\mathbb{C})$, причём матрица H эрмитова если и только если матрица iH косоэрмитова и наоборот. Например, при $n = 2$ базис вещественного пространства $\mathrm{Mat}_2^+(\mathbb{C})$ эрмитовых матриц составляют матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая эти матрицы на i, получаем базис в пространстве $\mathrm{Mat}_2^-(\mathbb{C})$ антиэрмитовых матриц:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы, обратные к своим эрмитово сопряжённым, называются *унитарными*. Они образуют в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ мультипликативную подгруппу

$$U_n \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid F^\times = F^{-1}\}, \tag{15-8}$$

которая называется *унитарной группой*.

15.4. Комплексные структуры на вещественном пространстве. Вещественно линейный оператор $I : V \to V$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ называется *комплексной структурой*, если он удовлетворяет соотношению $I^2 = -\mathrm{Id}_V$. Например, когда $V = W_{\mathbb{R}}$ является овеществлением[1] векторного пространства W над полем $\mathbb{C}$, имеющийся в V $\mathbb{R}$-линейный оператор $I : V \to V$, $w \mapsto iw$, умножения векторов $w \in W$ на i, является комплексной структурой на V. Наоборот, если на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ задана комплексная структура $I : V \to V$, то можно определить умножение векторов $v \in V$ на комплексные числа правилом

$$(x + iy)\, v \stackrel{\text{def}}{=} x\, v + y\, I(v). \tag{15-9}$$

Упражнение 15.6. Убедитесь прямым вычислением, что это правило задаёт на V структуру векторного пространства над полем $\mathbb{C}$, и выведите отсюда, что $\dim_{\mathbb{R}} V$ чётна.

Чтобы понять это без вычислений, рассмотрим комплексификацию $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus iV$ пространства V и комплексифицированный $\mathbb{C}$-линейный оператор $I_{\mathbb{C}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} I$. Так как оператор $I_{\mathbb{C}}$ тоже удовлетворяет соотношению $I_{\mathbb{C}}^2 = -\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$, т. е. аннулируется сепарабельным многочленом $t^2 + 1 = (t + i)(t - i)$, его собственные значения исчерпываются числами $\pm i \in \mathbb{C}$, а комплексное пространство $V_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ распадается в прямую сумму[2] комплексных собственных подпространств $W_+ = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = iw\}$ и $W_- = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = -iw\}$ оператора $I_{\mathbb{C}}$. Как мы видели в предл. 15.2, для каждого собственного вектора w оператора $I_{\mathbb{C}}$ сопряжённый вектор $\overline{w}$ тоже собственный и имеет сопряжённое собственное число. Поэтому оператор комплексного

[1] См. n° 15.1 на стр. 244.
[2] См. предл. 9.7 на стр. 156.

сопряжения задаёт $\mathbb{C}$-полулинейный инволютивный изоморфизм $W_+ \leftrightarrows W_-$, $w \leftrightarrow \overline{w}$. Тем самым, $W_- = \overline{W}_+$, $\dim_{\mathbb{C}} W_- = \dim_{\mathbb{C}} W_+$ и $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W_+$ чётна.

Заметим теперь, что для любого разложения пространства $V_{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U} \tag{15-10}$$

двух комплексно сопряжённых друг другу комплексных векторных подпространств $U, \overline{U} \subset V_{\mathbb{C}}$ сопоставление вектору $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$ его удвоенной вещественной части $2\operatorname{Re} w = 2u = w + \overline{w} \in V$ задаёт $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм

$$2\operatorname{Re}: \; U \xrightarrow{\sim} V, \quad w \mapsto \operatorname{Re} w = w + \overline{w}. \tag{15-11}$$

В самом деле, с точки зрения разложения (15-10) комплексное сопряжение $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, $w \mapsto \overline{w}$, переводит вектор $(u_1, \overline{u}_2) \in U \oplus \overline{U}$, где $u_1, u_2 \in U$, в вектор $(u_2, \overline{u}_1)$. Поэтому сопряжённые сами себе вещественные векторы $v \in V \subset V_{\mathbb{C}}$ имеют вид $v = (u, \overline{u}) = u + \overline{u} = 2\operatorname{Re} u$, где $u \in U$. Иначе говоря, для любого вектора $v \in V \subset V_{\mathbb{C}}$ существует единственный такой вектор $u \in U$, что $2\operatorname{Re} u = v$. Вещественный изоморфизм (15-11) превращает имеющийся в комплексном векторном пространстве U оператор умножения на i в $\mathbb{R}$-линейный оператор $I_U : V \to V$, отправляющий вектор $v = 2\operatorname{Re}(u) \in V$, где $u \in U$, в вектор $2\operatorname{Re}(iu) \in V$. Очевидно, что подпространства $U, \overline{U} \subset V_{\mathbb{C}}$ являются собственными подпространствами комплексифицированного оператора $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} I_U : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ с собственными числами i и $-i$ соответственно. В частности, $I_U^2 = -\mathrm{Id}_V$. При этом формула (15-9), написанная для оператора I_U в роли I, задаёт на пространстве V такое умножение на комплексные числа, что изоморфизм (15-11) становится $\mathbb{C}$-линейным.

Применяя сказанное к подпространству $U = W_+$, мы заключаем, что взятие удвоенной вещественной части задаёт $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм между комплексным векторным пространством W_+ и вещественным пространством V, причём умножение на i в W_+ переходит при этом изоморфизме в действие оператора I на V. Тем самым формула (15-9) действительно задаёт на V структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, в которой изоморфизм $2\operatorname{Re}: W_+ \xrightarrow{\sim} V$ становится $\mathbb{C}$-линейным. Подытожим сказанное как

Предложение 15.4

Следующие структуры на вещественном векторном пространстве V размерности $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ находятся в канонической биекции друг с другом:

1) умножение $\mathbb{C} \times V \to V$ векторов из V на комплексные числа, согласованное с имеющимся в V умножением на вещественные числа $\mathbb{R} \times V \to V$ и превращающее V в n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$

2) вещественно линейный оператор $I : V \to V$ с $I^2 = -\mathrm{Id}_V$

3) n-мерное комплексное векторное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$, такое, что[1] $U \cap \overline{U} = 0$.

Структуре (1) отвечает в (2) оператор $I : v \mapsto iv$ умножения векторов на i, а в (3) — собственное подпространство $U = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}} w = iw\}$ с собственным числом i комплексифицированного оператора $I_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Комплексному подпространству $U \subset V_{\mathbb{C}}$ из (3) отвечает в (1) умножение на комплексные числа по правилу $zv = 2\operatorname{Re}(zu)$, где $u \in U$ имеет $2\operatorname{Re} u = v$, а в (2) — оператор $I_U : V \to V$, получающийся ограничением на V комплексно линейного автоморфизма пространства $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$, действующего на подпространствах U и $\overline{U}$ умножением на i и $-i$ соответственно. □

[1] Это условие равносильно тому, что $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$.

15.5. Эрмитовы структуры и кэлеровы тройки. Векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если на нём задана *эрмитова структура*[1] — полуторалинейная эрмитово симметричная положительная форма $(\,*\,,\,*\,)\colon\ W \times W \to \mathbb{C}$, где эрмитова симметричность означает, что $(u,w) = \overline{(w,u)}$ для всех $u, w \in W$, а положительность — что вещественное число $(v,v) = \overline{(v,v)}$ положительно для всех ненулевых $v \in W$. Полагая

$$g(u,w) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(u,w) \quad \text{и} \quad \omega(u,w) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(u,w)\,,$$

получаем две вещественно билинейные формы $g, \omega\colon\ W_{\mathbb{R}} \times W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Эрмитова симметричность комплекснозначной формы $(u,w) = g(u,w) + i\omega(u,w)$ равносильна симметричности g и кососимметричности ω. Положительность формы (u,w) влечёт положительность формы g, задающей тем самым евклидову структуру на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$. Равенство

$$(u, iw) = -i(u,w)$$

равносильно паре равенств $g(u,iw) = \omega(u,w)$ и $\omega(u,iw) = -g(u,w)$, переходящих друг в друга при замене w на iw. На языке матриц первое из этих равенств означает, что записанные в произвольном базисе пространства $W_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G, Ω форм g, ω и матрица оператора $I\colon\ W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$, $w \mapsto iw$, связаны соотношением $GI = \Omega$, из которого вытекает, в частности, что $\det \Omega \neq 0$, т. е. форма ω невырождена и задаёт на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$ симплектическую структуру.

Наоборот, пусть на вещественном векторном пространстве V размерности $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ заданы

- евклидова структура[2] $g\colon\ V \times V \to \mathbb{R}$
- симплектическая структура[3] $\omega\colon\ V \times V \to \mathbb{R}$
- комплексная структура[4] $I\colon\ V \to V$.

Рассмотрим V как комплексное векторное пространство, в котором умножение на комплексные числа задаётся при помощи оператора I по форм. (15-9) на стр. 251, и обозначим через

$$(\,*\,,\,*\,)\colon\ V \times V \to \mathbb{C}$$

вещественно билинейную форму, сопоставляющую векторам $u, w \in V$ комплексное число

$$(u,w) \overset{\text{def}}{=} g(u,w) + i\omega(u,w) \tag{15-12}$$

Упражнение 15.7. Убедитесь, что эта форма вещественно билинейна, эрмитово симметрична и положительна.

Данные (I, g, ω) называются *кэлеровой тройкой*, если они удовлетворяют лем. 15.1 ниже.

Лемма 15.1
Следующие свойства тройки (I, g, ω) эквивалентны друг другу:

[1] См. прим. 15.2 на стр. 249.
[2] Т. е. симметричная положительно определённая $\mathbb{R}$-билинейная форма.
[3] Т. е. невырожденная кососимметричная $\mathbb{R}$-билинейная форма.
[4] Т. е. $\mathbb{R}$-линейный эндоморфизм с квадратом $-\mathrm{Id}_V$, см. n° 15.4 на стр. 251.

1) форма (15-12) задаёт на комплексном векторном пространстве V эрмитову структуру
2) форма (15-12) $\mathbb{C}$-линейна по первому аргументу
3) форма (15-12) $\mathbb{C}$-полулинейна по второму аргументу
4) $g(u, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$
5) $\omega(u, Iw) = -g(u, w)$ для всех $u, w \in V$
6) записанные в одном базисе пространства V над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G, Ω форм g, ω и матрица оператора I связаны равенством $GI = \Omega$.

Доказательство. Равенство $(Iu, w) = i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(Iu, w) = -\omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(Iu, w) = g(u, w),$$

переходящих друг в друга при замене u на Iu, так как $I^2 = -\mathrm{Id}$. Равенство $(u, Iw) = -i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(u, Iw) = \omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, Iw) = -g(u, w),$$

переходящих друг в друга при замене w на Iw. В силу симметричности g и кососимметричности ω выполнение для всех $u, w \in V$ первой пары равенств эквивалентно выполнению второй. Это доказывает эквивалентность первых пяти свойств. Условие (6) является матричной записью условия (4). □

Следствие 15.4
Любые два элемента кэлеровой тройки (I, g, ω) однозначно задают третий.

Доказательство. Это вытекает из свойства (6) и обратимости матриц I, G, Ω. □

Следствие 15.5
Оператор I в кэлеровой тройке (I, g, ω) одновременно является ортогональным для g и симплектическим для ω, т. е. $g(Iu, Iw) = g(u, w)$ и $\omega(Iu, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$.

Доказательство. Из (1) вытекает, что $(Iu, Iw) = (u, w)$. Сравнивая вещественную и мнимую части, получаем требуемое. □

15.5.1. Келеровы тройки с заданным g. Пусть на вещественном векторном пространстве V задана евклидова структура $g : V \times V \to \mathbb{R}$. По сл. 15.5 в любой кэлеровой тройке (I, g, ω) комплексная структура I является g-ортогональным оператором, т. е. $g(Iu, Iw) = g(u, w)$ для всех $u, w \in V$. Для любой такой комплексной структуры I вещественная билинейная форма $\omega(u, w) \overset{\text{def}}{=} g(u, Iw)$ имеет матрицу Грама $\Omega = GI$ и, стало быть невырождена. Выкладка

$$\omega(u, w) = g(u, Iw) = g(Iu, I^2 w) = -g(Iu, w) = -g(w, Iu) = -\omega(w, u)$$

показывает, что форма ω кососимметрична. Тем самым тройка (I, g, ω) кэлерова. Мы заключаем, что кэлеровы тройки (I, g, ω) с заданной евклидовой структурой g находятся в биекции с g-ортогональными комплексными структурами.

Предложение 15.5
Пусть на $2n$-мерном вещественном пространстве V задано евклидово скалярное произведение $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Обозначим через $g_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ его комплексно билинейное продолжение[1] на комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V. Соответствие из предл. 15.4 на стр. 252 задаёт каноническую биекцию между кэлеровыми тройками (I, g, ω) и изотропными[2] для формы $g_{\mathbb{C}}$ комплексными подпространствами $U \subset V_{\mathbb{C}}$ размерности $\dim_{\mathbb{C}} U = n$.

Доказательство. В предл. 15.4 комплексной структуре $I : V \to V$ ставится в соответствие собственное подпространство U её комплексификации $I_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ с собственным числом i. Мы должны показать что это соответствие задаёт биекцию между g-ортогональными комплексными структурами I и $g_{\mathbb{C}}$-изотропными n-мерными комплексными подпространствами $U \subset V_{\mathbb{C}}$.

Упражнение 15.8. Пусть $\mathbb{R}$-линейный оператор $F : V \to V$ является изометрией $\mathbb{R}$-билинейной формы $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, т. е. $\beta(Fv_1, Fv_2) = \beta(v_1, v_2)$ для всех $v_1, v_2 \in V$. Убедитесь, что его комплексификация $F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ является изометрией $\mathbb{C}$-билинейного продолжения $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ формы β, т. е. $\beta_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}}w_1, F_{\mathbb{C}}w_2) = \beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$.

Из упражнения вытекает, что оба собственных подпространства $W_{\pm} = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = \pm iw\}$ комплексификации любой g-ортогональной комплексной структуры I изотропны для формы $g_{\mathbb{C}}$, поскольку $g_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = g_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}w_1, I_{\mathbb{C}}w_2) = g_{\mathbb{C}}(\pm iw_1, \pm iw_2) = -g_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ при $w_1, w_2 \in U_{\pm}$, откуда $g_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = 0$.

Покажем, что если n-мерное комплексное векторное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$ изотропно для $g_{\mathbb{C}}$, то оно удовлетворяет условию (3) из предл. 15.4, т. е. $U \cap \overline{U} = 0$. Пусть $u_1 = \overline{u}_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in U$. Тогда вещественный вектор $u_1 + u_2 \in U \cap V$ изотропен. Так как у формы g нет ненулевых изотропных векторов в V, мы заключаем, что $u_2 = -u_1$, откуда $\overline{u}_1 = -u_1$. Тем самым, $u_1 = iv$ для некоторого $v \in V$. Но тогда $g(v, v) = g_{\mathbb{C}}(v, v) = g_{\mathbb{C}}(-iu_1, -iu_1) = -g_{\mathbb{C}}(u_1, u_1) = 0$, откуда $v = 0$. Итак, $U \cap \overline{U} = 0$ и $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$.

По упр. 15.4 на стр. 248 $g_{\mathbb{C}}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = \overline{g_{\mathbb{C}}(u_1, u_2)} = 0$ для всех $u_1, u_2 \in U$, т. е. подпространство $\overline{U}$ тоже изотропно для $g_{\mathbb{C}}$. Поэтому оператор $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, для которого подпространства U и $\overline{U}$ собственные с собственными числами i и $-i$ соответственно, является изометрией формы $g_{\mathbb{C}}$:

$$g_{\mathbb{C}}\big(J(u_1 + \overline{u}_2), J(u_1 + \overline{u}_2)\big) = g_{\mathbb{C}}(iu_1, -i\overline{u}_2) + g_{\mathbb{C}}(-i\overline{u}_1, iu_2) = \\ = g_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{u}_2) + g_{\mathbb{C}}(\overline{u}_1, u_2) = g_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{u}_2, u_1 + \overline{u}_2).$$

Соответствие из предл. 15.4 на стр. 252 сопоставляет разложению $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$ комплексную структуру $I_U = J|_V : V \to V$ — ограничение оператора J на вещественное подпространство V. Она является изометрией формы $g = g_{\mathbb{C}}|_V$, что и требовалось. □

Замечание 15.3. (изотропный грассманиан) Комплексные n-мерные изотропные подпространства невырожденной симметричной комплексно билинейной формы $g_{\mathbb{C}}$ на $2n$-мерном комплексном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ образуют подмножество комплексного грассманиана[3] $\mathrm{Gr}(n, V_{\mathbb{C}})$, которое

---

[1] См. n° 15.2.3 на стр. 248.

[2] Т. е. такими комплексными векторными подпространствами, на которые форма $g_{\mathbb{C}}$ ограничивается в тождественно нулевую форму, см. раздел 14.1.2 на стр. 182 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

[3] См. n° 14.6 на стр. 238.

называется *изотропным грассманианом* формы $g_{\mathbb{C}}$ и обозначается $\mathrm{Gr}_{g_{\mathbb{C}}}(n, V_{\mathbb{C}})$. В терминах однородных матричных координат[1] $X \in \mathrm{Mat}_{n\times 2n}(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Gr}(n, V_{\mathbb{C}})$ изотропный грассманиан

$$\mathrm{Gr}_{g_{\mathbb{C}}}(n, V_{\mathbb{C}}) \subset \mathrm{Gr}(n, V_{\mathbb{C}})$$

задаётся системой алгебраических уравнений второй степени $XGX^t = 0$, где G — матрица Грама евклидовой структуры на V, записанная в том же вещественном базисе пространства $V_{\mathbb{C}}$, относительно которого исчисляются однородные координаты X.

Упражнение 15.9. Убедитесь, что при замене $X \mapsto CX$, где $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, система уравнений $XGX^t = 0$ переходит в эквивалентную систему.

Согласно предл. 15.5, продолжения заданной евклидовой структуры g на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ до кэлеровой тройки (I, g, ω) находятся в канонической биекции с точками комплексного изотропного грассманиана $\mathrm{Gr}_{g_{\mathbb{C}}}(n, \mathbb{C}^{2n})$.

15.5.2. Келеровы тройки с заданным $\boldsymbol{\omega}$. Пусть теперь на вещественном векторном пространстве V задана симплектическая структура $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. По сл. 15.5 в любой кэлеровой тройке (I, g, ω) комплексная структура I является изометрией формы ω, т. е.

$$\omega(Iu, Iw) = \omega(u, w) \text{ для всех } u, w \in V\,. \tag{15-13}$$

Для любой такой комплексной структуры I вещественная билинейная форма

$$g(u, w) \overset{\text{def}}{=} \omega(Iu, w) = -\omega(u, Iw)$$

невырождена и симметрична, так как $g(u, w) = \omega(Iu, w) = -\omega(u, Iw) = \omega(Iw, u) = g(w, u)$. Тем самым, тройка (I, g, ω) кэлерова если и только если квадратичная форма $g(v, v) = \omega(Iv, v)$ положительно определена на V. Мы заключаем, что кэлеровы тройки (I, g, ω) с заданной симплектической структурой ω находятся в биекции с комплексными структурами I, которые удовлетворяют условию (15-13) и таковы, что квадратичная форма $g(v, v) = \omega(Iv, v)$ положительна.

Предложение 15.6
Пусть на $2n$-мерном вещественном пространстве V задана невырожденная кососимметричная билинейная форма $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ и $\omega_{\mathrm{H}}(w_1, w_2) \overset{\text{def}}{=} \omega_{\mathbb{C}}(w_1, \overline{w}_2)$ её комплексно билинейное и полуторалинейное продолжения на комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V. Соответствие из предл. 15.4 на стр. 252 задаёт каноническую биекцию между кэлеровыми тройками (I, g, ω) и такими комплексными подпространствами $U \subset V_{\mathbb{C}}$ размерности $\dim_{\mathbb{C}} U = n$, что ограничение на U формы $\omega_{\mathbb{C}}$ нулевое, а ограничение формы $i\omega_{\mathrm{H}}$ является эрмитовой структурой на U.

Доказательство. Как и в доказательстве предл. 15.5, из упр. 15.8 на стр. 255 вытекает, что ограничение формы $\omega_{\mathbb{C}}$ на собственные подпространства $W_{\pm} = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = \pm iw\}$ оператора $I_{\mathbb{C}}$ изотропны для формы $\omega_{\mathbb{C}}$.

Упражнение 15.10. Убедитесь в этом.

[1] См. n° 14.6.3 на стр. 239.

Покажем, что полуторалинейная форма $i\omega_{\mathrm{H}}$ задаёт эрмитову структуру на собственном подпространстве $W_+ = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}} w = iw\}$ если и только если полуторалинейная форма $V \times V \to \mathbb{C}$, заданная правилом

$$(v_1, v_2) = g(v_1, v_2) + i\omega(v_1, v_2), \quad \text{где} \quad g(u_1, u_2) = -\omega(u_1, Iu_2), \tag{15-14}$$

задаёт эрмитову структуру на V. Как мы видели в предл. 15.2 на стр. 246, равенство $I_{\mathbb{C}}(w) = iw$ для вектора $w = u + iv$ с $u, v \in V$ означает, что $Iu = -v$. Поэтому из равенств (15-13) и $I^2 = -\mathrm{Id}$ вытекает, что для всех $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$ из W_+

$$\begin{aligned} i\omega_{\mathrm{H}}(w_1, w_2) &= \omega(u_1, v_2) - \omega(v_1, u_2) + i\left(\omega(u_1, u_2) + \omega(v_1, v_2)\right) = \\ &= -\omega(u_1, Iu_2) + \omega(Iu_1, u_2) + i\big(\omega(u_1, u_2) + \omega(Iu_1, Iu_2)\big) = \\ = 2\left(-\omega(u_1, Iu_2) + i\omega(u_1, u_2)\right) &= 2\left(g(u_1, u_2) + i\omega(u_1, u_2)\right) = \big(2\,\mathrm{Re}(w_1), 2\,\mathrm{Re}(w_2)\big)/2\,. \end{aligned} \tag{15-15}$$

Мы заключаем, что положительность ограничения формы $i\omega_{\mathrm{H}}$ на W равносильна положительности формы (15-14) на V.

Рассмотрим теперь произвольное n-мерное комплексное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$, на которое $\omega_{\mathbb{C}}$ ограничивается в тождественно нулевую, а $i\omega_{\mathbb{C}}(U, \overline{U})$ — в положительно определённую форму. Тогда $U \cap \overline{U} = 0$, ибо если $u_1, u_2 \in U$ таковы, что $\overline{u}_1 = u_2$, то $\omega_{\mathrm{H}}(u_1, u_1) = i\,\omega_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{u}_1) = i\omega_{\mathbb{C}}(u_1, u_2) = 0$, откуда $u_2 = 0$. Поэтому $V = U \oplus \overline{U}$. Как и в доказательстве предл. 15.5, из упр. 15.4 на стр. 248 вытекает, что подпространство $\overline{U}$ изотропно для билинейной формы $\omega_{\mathbb{C}}$, ибо $\omega_{\mathbb{C}}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = \overline{\omega_{\mathbb{C}}(u_1, u_2)} = 0$ для всех $u_1, u_2 \in U$, а оператор $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, действующий на U и на $\overline{U}$ умножениями на i и на $-i$ соответственно, является изометрией формы $\omega_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}}\big(J(u_1 + \overline{v}_1), J(u_2 + \overline{v}_2)\big) &= \omega_{\mathbb{C}}(iu_1, -i\overline{v}_2) + \omega_{\mathbb{C}}(-i\overline{v}_1, iu_2) = \\ &= \omega_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{v}_2) + \omega_{\mathbb{C}}(\overline{v}_1, u_2) = \omega_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{v}_1, u_2 + \overline{v}_2)\,, \end{aligned}$$

и значит, комплексная структура $I_U = J|_V$, задаваемая его ограничением на V, является изометрией формы $\omega = \omega_{\mathbb{C}}|_V$. Вычисление (15-15) показывает, что $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм

$$2\,\mathrm{Re} : U \to V_I$$

из форм. (15-11) на стр. 252 переводит эрмитову форму $i\omega_{\mathrm{H}}$ на U положительное кратное формы (15-14) на V, которая, тем самым, тоже эрмитова, а значит, тройка (I, g, ω) кэлерова. ☐

15.5.3. Зигелево полупространство $\mathfrak{H}_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Мы продолжаем рассматривать $2n$-мерное вещественное пространство V с заданной на нём невырожденной кососимметричной билинейной формой $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. Зафиксируем в V базис $(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'') = (e'_1, \dots, e'_n, e''_1, \dots, e''_n)$, в котором матрица Грама формы ω имеет канонический вид[1]

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{15-16}$$

и обозначим через $V', V'' \subset V$ изотропные подпространства, натянутые на первые n и на последние n базисных векторов соответственно. Тогда $V = V' \oplus V''$ и $V_{\mathbb{C}} = V'_{\mathbb{C}} \oplus V''_{\mathbb{C}}$, где оба подпространства $V'_{\mathbb{C}}, V''_{\mathbb{C}}$ изотропны для $\omega_{\mathbb{C}}$.

[1]Такие базисы называются *симплектическими*, см. пример 13.3 на стр. 174 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf.

Пусть задано разложение $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$, в котором сопряжённые друг другу комплексные векторные подпространства $U, \overline{U} \subset V_{\mathbb{C}}$ изотропны для комплексно билинейной формы $\omega_{\mathbb{C}}$. Если полуторалинейная форма $i\omega_{\mathrm{H}}$ положительно определена на U, то U имеет нулевые пересечения со всеми изотропными подпространствами формы $\omega_{\mathbb{C}}$, возникающими как комплексификации вещественных изотропных подпространств $W \subset V$, в силу того, что $i\omega_{\mathrm{H}}(w_1 + iw_2, w_1 + iw_2) = 0$ для всех $w_1, w_2 \in W$. В частности, $U \cap V''_{\mathbb{C}} = 0$ и проекция подпространства U на $V'_{\mathbb{C}}$ вдоль $V''_{\mathbb{C}}$ является изоморфизмом комплексных векторных пространств. Мы заключаем, что в U существует единственный базис $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, векторы которого переходят при этой проекции в первые n базисных векторов $\boldsymbol{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ зафиксированного нами симплектического базиса $(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'')$ в V. Иначе говоря,

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'') \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}'' S \tag{15-17}$$

для некоторой матрицы $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, причём подпространство U матрица S однозначно определяют друг друга. Так как матрицы Грама форм $\omega_{\mathbb{C}}$ и $i\omega_{\mathrm{H}}$ в базисе $\boldsymbol{u}$ имеют вид

$$\omega_{\mathbb{C}}|_U = \begin{pmatrix} E & S^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} = S - S^t\,,$$
$$i\omega_{\mathrm{H}}|_U = i \cdot \begin{pmatrix} E & S^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \overline{S} \end{pmatrix} = i\,(\overline{S} - S^t)\,,$$

подпространство U изотропно если и только если матрица S симметрична, и в этом случае

$$i\,(\overline{S} - S^t) = \mathrm{Im}\, S\,.$$

Поэтому положительность ограничения формы $i\omega_{\mathrm{H}}$ на U означает, что вещественная симметрическая матрица $\mathrm{Im}\, S$ положительно определена.

Множество симметричных матриц $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ с положительно определённой мнимой частью, т. е. таких, что

$$S^t = S \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x} \cdot \mathrm{Im}\, S \cdot \boldsymbol{x}^t > 0 \text{ для всех ненулевых } \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,, \tag{15-18}$$

называется *полупространством Зигеля*[1] и обозначается $\mathfrak{H}_n$. Условия (15-18) известны как *соотношения Римана*[2].

Теорема 15.1
Комплексные структуры, которые расширяют стандартную симплектическую структуру (15-16) на $\mathbb{R}^{2n}$ до эрмитовой структуры, взаимно однозначно соответствуют точкам зигелева полупро-

[1]По аналогии со случаем $n = 1$, когда условия (15-18) задают верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ в $\mathbb{C} = \mathrm{Mat}_1(\mathbb{C})$.

[2]Эти соотношения возникают в самых разных разделах геометрии. Например, они необходимы и достаточны для того, чтобы n-мерный комплексный тор $\mathbb{C}^n / \Lambda$, где $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ — целочисленная решётка, натянутая на n стандартных базисных векторов пространства $\mathbb{C}^n$ и n столбцов матрицы S, можно было аналитически вложить в комплексное проективное пространство как алгебраическое подмногообразие (подробности см. в книгах: *Д. Мамфорд*. *Лекции о тэта-функциях*. М., «Мир», 1988 и: *В. В. Шокуров*. *Римановы поверхности и алгебраические кривые*. М., «ВИНИТИ», 1988, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.», т. 23 «Алгебраическая Геометрия 1»).

странства $\mathfrak{H}_n$. В стандартном симплектическом базисе $(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'')$ комплексная структура I_S, задаваемая матрицей $S = X + iY \in \mathfrak{H}_n$, где $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, имеет блочную матрицу

$$I_S = \begin{pmatrix} -Y^{-1}X & Y^{-1} \\ -Y - XY^{-1}X & XY^{-1} \end{pmatrix} . \tag{15-19}$$

Доказательство. Нам осталось проверить только формулу (15-19). По предл. 15.4 комплексная структура $I_U : V \to V$, отвечающая разложению $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$, переводит вектор $v = \mathrm{Re}\, u$, где $v \in V$, $u \in U$, в вектор $\mathrm{Re}(iu)$. Если $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}''(X + iY)$, то $\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}''X$ и $\mathrm{Re}(i\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{e}''Y$. Поэтому

$$I(\boldsymbol{e}'') = I\big(\mathrm{Re}(-i\boldsymbol{u}Y^{-1})\big) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{u})Y^{-1} = \boldsymbol{e}'Y^{-1} + \boldsymbol{e}''XY^{-1}$$
$$I(\boldsymbol{e}') = I(\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{e}''X) = \mathrm{Re}(i\boldsymbol{u}) - I(\boldsymbol{e}'')X = -\boldsymbol{e}'Y^{-1}X + \boldsymbol{e}''(-Y + XY^{-1}X) .$$

□

Упр. 15.1. Тензор $(zc) \otimes v \in \mathbb{C} \otimes V$ трилинеен по $z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, $v \in V$.

Упр. 15.2. $(x+iy)(1 \otimes u + i \otimes v) = x \otimes u - y \otimes v + ix \otimes v + iy \otimes u = 1 \otimes (xu - yv) + i \otimes (xv + yu)$.

Упр. 15.3. $F_{\mathbb{C}}(u+iv) \overset{\text{def}}{=} Id \otimes F\,(1 \otimes u + i \otimes v) = 1 \otimes Fu + i \otimes Fv \overset{\text{def}}{=} Fu + iFv$.

Упр. 15.4. Пусть $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$. Тогда

$$\overline{\beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)} = \beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = \overline{\left(\beta(u_1,u_2) - \beta(v_1,v_2)\right) + i\left(\beta(u_1,v_2) + \beta(v_1,u_2)\right)} =$$
$$= \left(\beta(u_1,u_2) - \beta(v_1,v_2)\right) - i\left(\beta(u_1,v_2) + \beta(v_1,u_2)\right) = \beta_{\mathbb{C}}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta_{\mathbb{C}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)\,.$$

Упр. 15.5. Пусть $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$. Тогда

$$\overline{\beta\mathrm{H}(w_1, w_2)} = \beta\mathrm{H}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = \overline{\left(\beta(u_1,u_2) + \beta(v_1,v_2)\right) + i\left(\beta(v_1,u_2) - \beta(u_1,v_2)\right)} =$$
$$= \left(\beta(u_1,u_2) + \beta(v_1,v_2)\right) + i\left(\beta(u_1,v_2) - \beta(v_1,u_2)\right) = \beta\mathrm{H}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta\mathrm{H}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)\,.$$

Упр. 15.7. Первое очевидно, второе вытекает из симметричности g и кососимметричности ω, третье — из положительности формы g.

Упр. 15.8. В вещественном базисе пространства V над $\mathbb{R}$ изометричность оператора F равносильна соотношению $F^tBF = B$ на матрицу оператора F и матрицу Грама B формы β. Поскольку этот же базис является базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ и оператор $F_{\mathbb{C}}$ и форма β имеют в нём те же самые матрицы F, B, то же соотношение $F^tBF = B$ влечёт изометричность оператора $F_{\mathbb{C}}$ по отношению к форме $\beta_{\mathbb{C}}$.

Упр. 15.9. При $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ равенства $(CX)G(CX)^t = C(XGX^t)C^t = 0$ и $XGX^t = 0$ равносильны.

Упр. 15.10. $\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = \omega_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}w_1, I_{\mathbb{C}}w_2) = \omega_{\mathbb{C}}(\pm iw_1, \pm iw_2) = -\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ при $w_1, w_2 \in U_{\pm}$, откуда $g_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = 0$.