§16. Эрмитовы пространства

16.1. Эрмитова геометрия. Векторное пространство W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым* или *унитарным*, если на нём задана эрмитова структура[1] — полуторалинейное эрмитово симметричное скалярное произведение

$$(\ast, \ast) : W \times W \to \mathbb{C}.$$

Например, на координатном пространстве $\mathbb{C}^n$ имеется *стандартное* эрмитово скалярное произведение

$$(z, w) = z_1\overline{w}_1 + \ldots + z_n\overline{w}_n \tag{16-1}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, а на пространстве непрерывных функций $[a, b] \to \mathbb{C}$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ есть эрмитово скалярное произведение[2]

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx\,. \tag{16-2}$$

Вместо отрезка можно рассмотреть любое другое пространство, по которому можно интегрировать вещественные функции, например, диск или какую-нибудь гладкую кривую в $\mathbb{C}$.

В n° 15.5 на стр. 253 мы видели, что вещественная билинейная форма

$$g(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re}(u, w)$$

задаёт евклидову структуру на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$, а вещественная форма

$$\omega(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(u, w)$$

задаёт на $W_{\mathbb{R}}$ симплектическую структуру. Таким образом, эрмитово векторное пространство сочетает в себе свойства евклидова и симплектического пространств.

16.1.1. Эрмитова норма вектора. Вещественное число

$$\|w\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(w, w)} = \sqrt{g(w, w)} \tag{16-3}$$

называется *эрмитовой нормой* или *длиной* вектора $w \in W$. Обратите внимание, что эрмитова длина совпадает с евклидовой длиной вектора w относительно вещественного евклидова скалярного произведения g на $W_{\mathbb{R}}$. Эрмитово скалярное произведение $W \times W \to \mathbb{C}$ однозначно восстанавливается по функции длины $W \to \mathbb{R}$, поскольку

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(w_1, w_2) &= (w_1, w_2) + \overline{(w_1, w_2)} = (w_1, w_2) + (w_2, w_1) = \|w_1 + w_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2 \\ 2i\operatorname{Im}(w_1, w_2) &= (w_1, w_2) - \overline{(w_1, w_2)} = (w_1, w_2) - (w_2, w_1) = -i\left(\|w_1 + iw_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2\right) \end{aligned}$$

в силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения.

[1] См. n° 15.5 на стр. 253.
[2] Ср. с прим. 15.2 на стр. 249.

16.1.2. Матрицы Грама. На матричном языке эрмитова симметричность скалярного произведения означает, что матрица Грама[1] $G_{\boldsymbol{w}} = \big((w_i, w_j)\big) = \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{w}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ является *эрмитовой*[2], т. е. $G_{\boldsymbol{w}}^t = \overline{G}_{\boldsymbol{w}}$. Так как эрмитово скалярное произведение полулинейно по второму аргументу, при линейной замене векторов по формуле $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\, C_{\boldsymbol{uw}}$ матрица Грама меняется по правилу $G_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^t \boldsymbol{w} = C_{\boldsymbol{uw}}^t \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}\, \overline{C}_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uw}}^t G_{\boldsymbol{u}} \overline{C}_{\boldsymbol{uw}}$.

16.1.3. Ортогонализация Грама – Шмидта. Набор векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в эрмитовом пространстве W называется *ортонормальным* если его матрица Грама $G_{\boldsymbol{e}}$ единичная, т. е. когда все векторы попарно ортогональны друг другу и имеют единичную длину. Как и в евклидовом пространстве[3], в $\mathbb{C}$-линейной оболочке любого набора ненулевых векторов $w_1, \dots, w_m$ эрмитова пространства W можно указать такой ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$, что при каждом k линейная оболочка векторов $w_1, \dots, w_k$ содержится в линейной оболочке векторов $e_1, \dots, e_k$. Индуктивная процедура построения такого базиса называется *ортогонализацей Грама – Шмидта*. В качестве первого вектора берём $e_1 = w_1 / \|w_1\|$. Если для векторов $w_1, \dots, w_k$ уже построены такие ортонормальные векторы $e_1, \dots, e_i$, что $i \leqslant k$ и

$$\operatorname{span}(e_1, \dots, e_i) = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k)\,, \tag{16-4}$$

то положим $v_{i+1} = w_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{i} (w_{k+1}, e_\nu) \cdot e_\nu$. Так как для каждого из уже построенных векторов e_j выполняется равенство $(v_{i+1}, e_j) = (v_{k+1}, e_j) - (v_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$, вектор v_{i+1} ортогонален подпространству (16-4). Если $v_{i+1} = 0$, то вектор w_{k+1} лежит в подпространстве (16-4) и набор $w_1, \dots, w_k$ можно увеличить до набора $w_1, \dots, w_{k+1}$. Если $v_{i+1} \neq 0$, добавляем к векторам $e_1, \dots, e_i$ вектор $e_{i+1} = v_{i+1} / \|v_{i+1}\|$.

Лемма 16.1

Определитель Грама $\det G_{\boldsymbol{w}}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль если и только если $\boldsymbol{w}$ линейно зависим.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ew}}$, где $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормальный базис в $\operatorname{span} \boldsymbol{w}$. Тогда $G_{\boldsymbol{w}} = C_{\boldsymbol{ew}}^t \overline{C}_{\boldsymbol{ew}}$. Если $n < m$, то ранг матрицы $G_{\boldsymbol{w}}$ строго меньше её размера, и $\det G_{\boldsymbol{w}} = 0$. Если $n = m$, то $\det G_{\boldsymbol{w}} = \det C_{\boldsymbol{ew}} \cdot \overline{\det C_{\boldsymbol{ew}}} = |\det C_{\boldsymbol{ew}}|^2 > 0$. □

16.1.4. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Неотрицательность определителя Грама любой пары векторов $v, w \in W$

$$\det \begin{pmatrix} (v, v) & (v, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v, w) \cdot \overline{(v, w)} \geqslant 0$$

переписывается как эрмитова версия евклидова неравенства Коши – Буняковского – Шварца[4]

$$|(v, w)| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|\,, \tag{16-5}$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов v и w над полем $\mathbb{C}$.

---

[1] Здесь и далее при перемножении матриц, элементами которых являются векторы пространства W, мы считаем, что $u \cdot w \overset{\text{def}}{=} (u, w) \in \mathbb{C}$. Таким образом, произведение двух матриц из векторов является матрицей из комплексных чисел. Ср. с n° 5.3.1 на стр. 98.

[2] См. прим. 15.3 на стр. 250.

[3] См. предложение 10.1 на стр. 130 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

[4] См. следствие 3.1 на стр. 34 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf.

Следствие 16.1 (неравенство треугольника для эрмитовой нормы)
$\|w_1\| + \|w_2\| \geqslant \|w_1 + w_2\|$ для всех $w_1, w_2 \in W$.

Доказательство. $\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\,|(w_1, w_2)| \leqslant \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\|w_1\| \cdot \|w_2\| = \big(\|w_1\| + \|w_2\|\big)^2$. □

16.1.5. Унитарная группа. Линейный оператор $F : W \to W$ на эрмитовом пространстве W называется *унитарным*, если $\|Fw\| = \|w\|$ для всех $w \in W$. Так как эрмитово скалярное произведение однозначно выражается через длину[1], каждый унитарный оператор F сохраняет скалярное произведение:

$$(Fv, Fw) = (v, w) \quad \forall\, v, w \in W\,.$$

Поэтому матрица унитарного оператора в любом базисе связана с матрицей Грама этого базиса соотношением

$$F^t G \overline{F} = G\,. \tag{16-6}$$

Беря определители, заключаем, что $|\det F| = 1$. В частности, каждый унитарный оператор F обратим, и $F^{-1} = \overline{G}^{-1} \overline{F}^t \overline{G} = G^{t^{-1}} \overline{F}^t G^t$. В ортонормальном базисе эта формула редуцируется до

$$F^{-1} = \overline{F}^t\,.$$

Унитарные операторы на эрмитовом пространстве W образуют группу, которая обозначается $\mathrm{U}(W)$ и называется *унитарной группой* пространства W. Запись унитарных операторов матрицами в фиксированном ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W, задаёт изоморфизм унитарной группы с группой *унитарных матриц*[2]

$$\mathrm{U}_n = \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \overline{F}^t\}\,.$$

Её подгруппа $\mathrm{SU}_n = \{F \in \mathrm{U}_n \mid \det F = 1\}$, состоящая из матриц определителя 1, называется *специальной* унитарной группой. В отличие от вещественных ортогональных матриц определитель унитарной матрицы может принимать любое значение на единичной окружности

$$\mathrm{U}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\}\,.$$

Поэтому в эрмитовом пространстве отсутствует понятие *ориентации*[3].

16.1.6. Эрмитов объём. Зафиксируем в эрмитовом пространстве W какой-нибудь ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$ в качестве базиса единичного объёма и определим *эрмитов объём* n-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\, C_{ev}$ формулой

$$\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} |\det C_{ev}|\,.$$

Так как абсолютная величина определителя унитарной матрицы перехода между любыми двумя ортонормальными базисами равна единице, эрмитов объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, а квадрат эрмитова объёма, как и в евклидовом случае, равен абсолютной величине определителя Грама:

$$\mathrm{Vol}^2(v_1, \dots, v_n) = |\det C_{ev}|^2 = \det C_{ev}^t \cdot \overline{\det C_{ev}} = \det(C_{ev}^t \overline{\det C_{ev}}) = |\det G_v|\,.$$

[1] См. n° 16.1.1 на стр. 260.
[2] См. формулу (15-8) на стр. 251.
[3] Ср. с разделом 10.2.1 на стр. 133 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

16.1.7. Эрмитова двойственность. В силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения каждый вектор w эрмитова пространства W задаёт полулинейно зависящий от w комплексно линейный функционал $h_w : W \to \mathbb{C}$, $u \mapsto (u, v)$, правого скалярного умножения на w. Полулинейное отображение

$$h : W \to W^*, \quad w \mapsto h_w, \tag{16-7}$$

называется *эрмитовой корреляцией*. Оно инъективно, поскольку $h_w(w) = (w, w) \neq 0$ для ненулевого w в силу положительности эрмитовой формы. Так как пространства W и W^* имеют одинаковую размерность над $\mathbb{C}$, их овеществления имеют одинаковую размерность над $\mathbb{R}$. Поэтому отображение (16-7) является вещественно линейным комплексно полулинейным изоморфизмом векторных пространств. Это означает, что для любого $\mathbb{C}$-линейного функционала $\varphi : W \to \mathbb{C}$ существует единственный такой вектор $u \in W$, что $\varphi(w) = (w, u)$ для всех $w \in W$, причём этот вектор $\mathbb{C}$-полулинейно зависит от φ.

В частности, у любого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ эрмитова пространстве W имеется *эрмитово двойственный* базис $\boldsymbol{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$, состоящий из прообразов $u_i^\times \overset{\text{def}}{=} h^{-1}(u_i^*)$ ковекторов двойственного к $\boldsymbol{u}$ базиса $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ в W^* и однозначно задаваемый соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j\,. \end{cases} \tag{16-8}$$

На матричном языке эти соотношения означают, что $\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}^\times = E$. Поэтому матрица $C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, линейно выражающая базис $\boldsymbol{u}^\times$ через базис $\boldsymbol{u}$ по формуле $\boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u} C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, удовлетворяет равенству $E = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}\, \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, откуда $(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n)\, \overline{G}_{\boldsymbol{u}}^{-1}$.

Упражнение 16.1. Убедитесь, что $u_i^{\times\times} = u_i$ для любого базиса $u_1, \dots, u_n$.

Ортонормальность базиса означает, что он совпадает со своим эрмитово двойственным.

Так как координаты произвольного вектора $w \in W$ в базисе $\boldsymbol{u}$ равны значениям $u_i^*(w) = (w, u_i^\times)$, разложение любого вектора w по любому базису $\boldsymbol{u}$ имеет вид

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times)\,. \tag{16-9}$$

16.1.8. Ортогонал и ортогональная проекция. В эрмитовом пространстве W у любого подпространства $U \subset W$ имеется выделенное дополнительное подпространство

$$U^\perp = \{w \in W \mid \forall\, u \in U \ (u, w) = 0\} = \{w \in W \mid \forall\, u \in U \ (w, u) = 0\}\,,$$

которое называется *ортогоналом* к U. Каждый вектор $w \in W$ задаёт линейный функционал

$$h_w : U \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto (u, w)\,.$$

Как мы видели выше, существует единственный такой вектор $w_U \in U$, что $(u, w) = (u, w_U)$ для всех $u \in U$. Разность $w_{U^\perp} \overset{\text{def}}{=} w - w_U$ лежит в $U^\perp$, так $(u, w_{U^\perp}) = (u, w) - (u, w_U) = 0$ для всех $u \in U$. Полученное нами разложение $w = w_U + w_{U^\perp}$, в котором $w_U \in U$, а $w_{U^\perp} \in U^\perp$, единственно, так как для любого такого разложения и всех $u \in U$ выполняются равенства $(u, w) = (u, w_U)$, однозначно задающие вектор $w_U \in U$. Таким образом, $W = U \oplus U^\perp$.

Комплексно линейный оператор $\pi_U : W \to W$, $w \mapsto w_U$, проектирующий W на U вдоль $U^\perp$ называется *ортогональным проектором*. Так как для любой пары эрмитово двойственных базисов $u_1, \dots, u_m$ и $u_1^\times, \dots, u_m^\times$ подпространства U

$$w_U = \sum\nolimits_i (w_U, u_i^\times)\, u_i = \sum\nolimits_i \overline{(u_i^\times, w_U)}\, u_i = \sum\nolimits_i \overline{(u_i^\times, w)}\, u_i = \sum\nolimits_i (w, u_i^\times)\, u_i\,,$$

координатами ортогональной проекции w_U вектора w на U в любом базисе $u_1, \dots, u_m$ подпространства U являются скалярные произведения $(w, u_i^\times)$ вектора w с векторами эрмитово двойственного базиса.

Иначе ортогональная проекция w_U вектора w на U описывается как единственный вектор из U, на котором (нелинейный) функционал $U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u - w\|$, расстояния до вектора w достигает своего абсолютного минимума на U. В самом деле, для всех $v \in U$

$$\|w - (w_U + v)\|^2 = \big((w - w_U) - v, (w - w_U) - v\big) = \|w - w_U\|^2 + \|v\|^2 \geqslant \|w - w_U\|^2\,,$$

и равенство равносильно тому, что $v = 0$.

16.1.9. Угол между комплексными прямыми. В евклидовом пространстве угол

$$\measuredangle(L_1, L_2) \in [0, \pi/2]$$

между вещественными прямыми $L_1 = \mathbb{R}\,u$ и $L_2 = \mathbb{R}\,w$ с направляющими векторами u, w определялся равенством[1]

$$\cos \measuredangle(L_1, L_2) = \frac{|(u, w)|}{\|u\| \cdot \|w\|} = (u/\|u\|, w/\|w\|)\,, \tag{16-10}$$

правая часть которого лежит на отрезке $[0, 1]$ в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца. Направляющие векторы единичной длины $u/\|u\|$ и $w/\|w\|$ на каждой прямой единственны с точностью до умножения на ± 1. Пересекающиеся прямые L_1, L_2 разбивают натянутую на них вещественную плоскость на две пары смежных вертикальных углов. Формула (16-10) вычисляет косинус наименьшего из них.

В эрмитовом пространстве W комплексные прямые $L_1 = \mathbb{C}\,u$, $L_2 = \mathbb{C}\,w$ представляют собою двумерные вещественные плоскости в овеществлённом пространстве $W_\mathbb{R}$, пересекающиеся в единственной точке $0 \in W$. Линейная оболочка этих плоскостей $V = (L_1 \oplus L_2)_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^4$ является четырёхмерным вещественным пространством. Базисные векторы единичной длины заметают в каждой плоскости L_i единичную окружность с центром в нуле. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной вещественной трёхмерной сфере $S^3 = \{\, v \in V \mid \|v\| = 1\}$. Поэтому евклидов угол между векторами $e_1 \in L_1$ и $e_2 \in L_2$ длины 1 ограничен и достигает своего минимального значения на некоторой паре векторов e_1, e_2. Евклидов угол $\measuredangle(e_1, e_2)$ между этими векторами называется *эрмитовым углом* между комплексными прямыми L_1 и L_2 и обозначается $\measuredangle(L_1, L_2)$. Покажем, что он вычисляется по той же самой формуле (16-10), что и в евклидовом пространстве.

Пусть векторы $u \in L_1$ и $w \in L_2$ имеют длину 1. При умножении этих векторов на комплексные числа единичной длины $|(u, w)|$ не меняется. Поэтому правая часть формулы (16-10) и сумма[2] $g^2(u, w) + \omega^2(u, w) = |(u, w)|^2$ не зависят от выбора векторов u и w на единичных

[1]См. раздел 10.4.2 на стр. 137 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

[2]Напомню, что $g(u, w) = \operatorname{Re}(u, w)$, а $\omega(u, w) = \operatorname{Im}(u, w)$, см. стр. 260.

окружностях в L_1 и L_2. Максимальное значение $\cos^2 \measuredangle(u,w) = g^2(u,w)$ получается при минимальном значении $\omega^2(u,w)$, которое достигается и равно нулю, поскольку трёхмерное в силу невырожденности формы ω вещественное подпространство $u^\perp_\omega = \{v \in V \mid \omega(u,v) = 0\}$ имеет в четырёхмерном пространстве V ненулевое пересечение с двумерным подпространством L_2. Таким образом, для каждого вектора $u \in L_1$ длины 1 существует такой вектор $w \in L_2$ длины 1, что $\omega^2(u,w) = 0$, а $g^2(u,w) = |(u,w)|^2$ максимально возможное. Для этих векторов формула (16-10) выдаёт минимально возможный евклидов угол между вещественными прямыми $\mathbb{R}\,u$ и $\mathbb{R}\,w$ в евклидовой структуре, задаваемой формой g.

16.2. Эрмитово сопряжение линейных отображений. Напомню[1], что с каждым линейным отображением $F : U \to W$ канонически связано *двойственное отображение*

$$F^* : W^* \to U^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ F, \tag{16-11}$$

которое однозначно описывается тем, что $\langle\, Fu\,,\, \varphi\,\rangle = \langle\, u\,,\, F^*\varphi\,\rangle$ для всех $u \in U$ и $\varphi \in W^*$, где

$$\langle\, *\,,\, *\,\rangle : V \times V^* \to \mathbb{C}$$

обозначает свёртку векторов с ковекторами. Сопрягая F^* эрмитовыми корреляциями

$$h_U : U \to U^*, \quad u \mapsto (\,*\,, u), \quad \text{и} \quad h_W : W \to W^*, \quad w \mapsto (\,*\,, w),$$

из форм. (16-7) на стр. 263, получаем линейное отображение

$$F^\times \overset{\text{def}}{=} h_U^{-1} F^* h_W : W \to U, \tag{16-12}$$

которое называется *эрмитово сопряжённым* к F и однозначно описывается тем, что

$$(Fu, w) = (u, F^\times w) \tag{16-13}$$

для всех $u \in U$ и $w \in W$. Если зафиксировать в U и W базисы $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$, то равенство (16-13) станет эквивалентно mn соотношениям $(Fu_i, w_j) = (u_i, F^\times w_j)$ на скалярные произведения базисных векторов, которые собираются в матричное равенство

$$F(\boldsymbol{u})^t\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^t\, F^\times(\boldsymbol{w})\,.$$

Подставляя в него $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$ и $F^\times(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\, F^\times_{\boldsymbol{uw}}$, получаем соотношение $F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{F}^\times_{\boldsymbol{uw}}$, связывающее матрицы Грама $G_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}$ и $G_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^t \boldsymbol{w}$ базисов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ с матрицами $F_{\boldsymbol{wu}}$ и $F^\times_{\boldsymbol{uw}}$ операторов F и $F^\times$ в этих базисах. Из него вытекает, что $F^\times_{\boldsymbol{uw}} = \overline{G_{\boldsymbol{u}}^{-1} F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}}}$.

Если базисы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ ортонормальны, последнее равенство упрощается до $F^\times_{\boldsymbol{uw}} = \overline{F}^t$. Таким образом, матрицы эрмитово сопряжённых операторов в ортонормальных базисах эрмитово сопряжены[2] друг другу.

Предложение 16.1

Эрмитово сопряжение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U)$, $F \mapsto F^\times$, является инволютивным полулинейным изоморфизмом комплексных векторных пространств. При этом для любого линейного отображения $F : U \to W$ выполняются равенства

$$F^{\times\times} = F\,, \quad \ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp\,, \quad \operatorname{im} F^\times = (\ker F)^\perp\,,$$

а для любой пары линейных отображений $F : U \to V$, $G : V \to W$ — равенство $(GF)^\times = F^\times G^\times$.

[1] См. раздел 7.3 на стр. 88 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_07.pdf.

[2] См. прим. 15.3 на стр. 250.

Доказательство. Инволютивность и полулинейность вытекают из (16-13) и, соответственно, эрмитовой симметричности и полуторалинейности скалярного произведения: равенства

$$(F^\times w, u) = \overline{(u, F^\times w)} = \overline{(Fu, w)} = (w, Fu)$$

означают, что $F^{\times\times} = F$, а равенства $(zFu, w) = z(Fu, w) = z(u, F^\times w) = (u, \overline{z}F^\times w)$ — что $(zF)^\times = \overline{z}\,F^\times$. Вектор $w \in \ker F^\times$ если и только если $(u, F^\times w) = 0$ для всех $u \in U$. В силу (16-13) это равносильно равенству $(Fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, т. е. ортогональности подпространства $\operatorname{im} F$ вектору w. Поэтому $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp$. Написав это для оператора $F^\times$ в роли F и взяв ортогонал к обеим частям, получаем $(\ker F)^\perp = \operatorname{im} F^\times$. Последнее утверждение вытекает из равенств $(GFu, w) = (Fu, G^\times w) = (u, F^\times G^\times w)$. □

16.2.1. Эрмитово сопряжение эндоморфизмов эрмитова пространства W задаёт на комплексном векторном пространстве $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ вещественную структуру[1]

$$\times : \operatorname{End}(W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(W)\,, \quad F \longmapsto F^\times\,.$$

Вещественное подпространство этой структуры обозначается

$$\operatorname{End}^+_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^\times = F\} \tag{16-14}$$

и называется пространством *самосопряжённых* или *эрмитовых* операторов, а чисто мнимое подпространство обозначается

$$\operatorname{End}^-_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^\times = -F\} \tag{16-15}$$

и называется пространством *антисамосопряжённых* или *косоэрмитовых* операторов. Это вещественные (не комплексные!) векторные пространства и умножения операторов на i и на $-i$ задают взаимно обратные $\mathbb{R}$-линейные изоморфизмы между этими пространствами. Овеществление пространства $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ является прямой суммой

$$\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)_{\mathbb{R}} = \operatorname{End}^+_{\mathbb{C}}(W) \oplus \operatorname{End}^-_{\mathbb{C}}(W)\,.$$

Компоненты разложения $F = F_+ + F_-$ произвольного $\mathbb{C}$-линейного оператора $F : W \to W$ в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов суть

$$F_+ = \frac{F + F^\times}{2} \in \operatorname{End}^+_{\mathbb{C}}(W) \quad \text{и} \quad F_- = \frac{F - F^\times}{2} \in \operatorname{End}^-_{\mathbb{C}}(W)\,.$$

Если зафиксировать в W ортонормальный базис и отождествить $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ с $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$, где $n = \dim W$, записав все операторы матрицами в этом базисе, то эрмитово сопряжение операторов превратится в эрмитово сопряжение матриц из прим. 15.3 на стр. 250

Пример 16.1 (унитарные операторы)
Поскольку каждый унитарный[2] оператор $F : W \to W$ взаимно однозначен, всякий вектор $w \in W$ можно записать в виде $F^{-1}v$ для некоторого $v \in W$. Поэтому выполнение для любых векторов u, w равенства $(Fu, Fw) = (u, w)$ равносильно выполнению для любых векторов u и $v = Fw$ равенства $(Fu, v) = (u, F^{-1}v)$. Мы заключаем, что оператор унитарен если и только если он эрмитово сопряжён своему обратному. На языке матриц это означает, что в унитарном базисе матрица унитарного оператора эрмитово сопряжена к своей обратной, т. е. $\overline{F}^t = F^{-1}$.

[1] См. n° 15.3 на стр. 250.
[2] См. n° 16.1.5 на стр. 262.

16.3. Нормальные операторы. Оператор F на эрмитовом пространстве W, называется *нормальным*, если он перестановочен со своим эрмитово сопряжённым оператором, т. е.

$$F^{\times} \cdot F = F \cdot F^{\times}.$$

Например, нормальными являются все (анти) самосопряжённые и унитарные операторы, так как для них $F^{\times}$ равен $\pm F$ и F^{-1} соответственно.

Теорема 16.1

Действующий в эрмитовом пространстве оператор F нормален если и только если он диагонализуем в ортонормальном базисе. При этом диагональная матрица для F с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора ортонормального базиса, в котором F диагонален.

Доказательство. Если оператор $F : W \to W$ имеет в ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$ диагональную матрицу $F_{\boldsymbol{e}}$, то сопряжённый к нему оператор имеет в этом базисе диагональную матрицу $\overline{F}_{\boldsymbol{e}}$, которая коммутирует с $F_{\boldsymbol{e}}$. Поэтому F нормален. Обратная импликация доказывается индукцией по $\dim W$. Если оператор F скалярен (что так при $\dim W = 1$), то доказывать нечего. Если F не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство $U \subsetneq W$ и $W = U \oplus U^{\perp}$. Согласно n° 9.2.7 на стр. 157 перестановочный F оператор $F^{\times}$ переводит U в себя. Поэтому для всех $u \in U$ и любого $w \in U^{\perp}$ выполняется равенство $(Fw, u) = (w, F^{\times}u) = 0$, т. е. $Fw \in U^{\perp}$. Таким образом, оператор F переводит $U^{\perp}$ в себя. По индукции, $F|_{U^{\perp}}$ диагонализуем в некотором ортонормальном базисе пространства $U^{\perp}$. Добавляя к этому базису любой ортонормальный базис собственного подпространства U, получаем базис пространства W, в котором матрица F диагональна. Последнее утверждение теоремы имеет место для любого диагонализуемого оператора, что было установлено нами в n° 9.2.6 на стр. 156. □

Следствие 16.2

Самосопряжённые операторы — это диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с вещественными собственными значениями.

Следствие 16.3

Антисамосопряжённые операторы — это диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с чисто мнимыми собственными значениями.

Следствие 16.4

Унитарные операторы — это диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с собственными значениями, по модулю равными единице.

Упражнение 16.2. Покажите, что унитарная группа U_n является компактным линейно связным подмножеством в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Пример 16.2 (нормальные операторы в евклидовом пространстве)

Изучаемое в курсе геометрии евклидово сопряжение[1] $\mathbb{R}$-линейных операторов $F : V \to V$ на евклидовом пространстве V над полем $\mathbb{R}$ при комплексификации и эрмитовом продолжении[2]

[1] См. раздел 11.2 на стр. 145 лекции http://82.204.189.191/ps/stud/geom_ru/2122/lec_11.pdf.

[2] См. прим. 15.2 на стр. 249.

евклидовой структуры $(\ast\,,\,\ast)$ на V до эрмитовой структуры $(\ast\,,\,\ast)_{\mathrm{H}}$ на $V_{\mathbb{C}}$ превращается в эрмитово сопряжение комплексифицированных операторов $F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, поскольку в евклидово ортонормальном базисе пространства V над $\mathbb{R}$, который одновременно является эрмитово ортонормальным базисом $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$, сопряжение означает транспонирование вещественной матрицы оператора F, которая одновременно является матрицей оператора $F_{\mathbb{C}}$. Очевидно, что евклидово (анти)самосопряжённые и ортогональные операторы на V при этом становятся, соответственно, (анти)эрмитовыми и унитарными операторами на $V_{\mathbb{C}}$. Мы заключаем, что для любого нормального[1] $\mathbb{R}$-линейного оператора $F : V \to V$ в пространстве $V_{\mathbb{C}}$ существует такой эрмитово ортонормальный базис, в котором матрица комплексифицированного оператора $F_{\mathbb{C}}$ диагональна.

Поскольку все собственные числа самосопряжённого оператора F вещественны, из сл. 15.2 на стр. 247 вытекает, что все собственные подпространства комплексифицированного оператора $F_{\mathbb{C}}$ являются комплексификациями собственных подпространств оператора F. В частности, последние евклидово ортогональны друг другу, и стало быть, в пространстве V можно выбрать евклидово ортонормальный базис, в котором матрица оператора F диагональна.

Если оператор F антисамосопяржён, то по сл. 15.3 на стр. 248 собственные подпространства оператора $F_{\mathbb{C}}$ разбиваются на пары сопряжённых V_{ia} и $\overline{V}_{ia} = V_{-ia}$, отвечающих комплексно сопряжённым чисто мнимым собственным числам $ia, -ia \in \operatorname{Spec}(F_{\mathbb{C}})$. Каждому эрмитово ортонормальному базису $w_1, \dots , w_m$ пространства V_{ia} отвечает комплексно сопряжённый базис $\overline{w}_1, \dots , \overline{w}_m$ пространства V_{-ia}. В силу упр. 15.5 на стр. 249 базис $\overline{w}_1, \dots , \overline{w}_m$ тоже ортонормален. По предл. 15.2 на стр. 246 $\mathbb{C}$-линейная оболочка каждой пары сопряжённых базисных векторов $w_\nu = u_\nu + iv_\nu$, $\overline{w}_\nu = u_\nu - iv_\nu$ является комплексификацией двумерного вещественного F-инвариантного подпространства U_ν с базисом u_ν, v_ν, в котором оператор F имеет матрицу[2]

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} . \tag{16-16}$$

Из равенств

$$1 = (u_\nu + iv_\nu, u_\nu + iv_\nu)_{\mathrm{H}} = (u_\nu, u_\nu) + (v_\nu, v_\nu) + i\big((v_\nu, u_\nu) - (u_\nu, v_\nu)\big) \tag{16-17}$$

$$0 = (u_\nu + iv_\nu, u_\nu - iv_\nu)_{\mathrm{H}} = (u_\nu, u_\nu) - (v_\nu, v_\nu) + i\big((v_\nu, u_\nu) + (u_\nu, v_\nu)\big) \tag{16-18}$$

вытекает, что $(u_\nu, v_\nu) = 0$, а $(u_\nu, u_\nu) = (v_\nu, v_\nu) = 1/2$. Тем самым, векторы $\sqrt{2}u_\nu$ и $\sqrt{2}v_\nu$ образуют ортонормальный базис в U. Мы заключаем, что евклидово антисамосопряжённый оператор F в подходящем ортонормальном базисе пространства V записывается блочно диагональной матрицей из 2×2 блоков вида (16-16) с $a > 0$ и такое представление с точностью до перестановки блоков не зависит от выбора базиса.

Упражнение 16.3. Докажите последнее утверждение.

Собственные значения ортогонального оператора F исчерпываются вещественными числами ± 1 и невещественными парами лежащих на единичной окружности сопряжённых чисел $\lambda, \overline{\lambda} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$, где $0 < \varphi < \pi$. Собственные подпространства оператора $F_{\mathbb{C}}$ с собственными числами ± 1 являются комплексификациями вещественных собственных подпространств $V_{\pm 1} \subset V$ оператора F, и в них имеются вещественные евклидово ортонормальные базисы. А

[1] Как и в эрмитовом случае, $\mathbb{R}$-линейный оператор $F : V \to V$ на евклидовом пространстве называется *нормальным*, если он перестановочен со своим евклидово сопряжённым.

[2] См. формулу (15-3) на стр. 246.

каждому эрмитово ортонормальному базису $w_1, \dots, w_m$ пространства V_λ отвечает комплексно сопряжённый базис $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_m$ пространства $V_{\overline{\lambda}}$. При этом, как и выше, $\mathbb{C}$-линейная оболочка каждой пары сопряжённых базисных векторов $w_\nu = u_\nu + iv_\nu$, $\overline{w}_\nu = u_\nu - iv_\nu$ является комплексификацией двумерного вещественного F-инвариантного подпространства U_ν с евклидово ортонормальным базисом $\sqrt{2}u_\nu$, $\sqrt{2}v_\nu$, в котором оператор F имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{16-19}$$

Мы заключаем, что ортогональный оператор F на евклидовом пространстве V в подходящем ортонормальном базисе записывается блочно диагональной матрицей из 1×1 блоков ± 1 и 2×2 блоков вида (16-19) с $0 < \varphi < \pi$, и такое представление с точностью до перестановки блоков не зависит от выбора базиса.

16.4. Полярное разложение обратимого линейного оператора на эрмитовом пространстве обобщает представление ненулевого комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = \varrho e^{i\vartheta}$, где число $\varrho = |z|$ вещественно и положительно, а число $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ лежит на единичной окружности. Если воспринимать z как оператор умножения на z в одномерном эрмитовом координатном пространстве $\mathbb{C}$, то равенство $z = \varrho e^{i\vartheta}$ раскладывает такой оператор в композицию самосопряжённого оператора $\varrho = \sqrt{zz^\times}$ с положительным собственным числом и унитарного оператора $e^{i\vartheta} = z\varrho^{-1}$.

Лемма 16.2
Для любого линейного оператора F на эрмитовом пространстве W операторы $FF^\times$ и $F^\times F$ самосопряжены и имеют неотрицательные, а если F обратим, то строго положительные собственные числа.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Из него следует, что все собственные числа операторов $FF^\times$ и $F^\times F$ вещественны. Если $FF^\times v = \lambda v$ для ненулевого v, то

$$\lambda\,(v,v) = (\lambda v, v) = (FF^\times v, v) = (F^\times v, F^\times v)\,.$$

Поэтому либо $F^\times v \neq 0$ и в этом случае $\lambda = (F^\times v, F^\times v)/(v,v) > 0$, либо $F^\times v = 0$ и $\lambda = 0$. Поскольку[1] $\ker F^\times = \operatorname{im} F^\perp$, условие $\ker F^\times \neq 0$ равносильно условию $\operatorname{im} F \neq W$, т. е. необратимости оператора F. Аналогично, если $F^\times F v = \lambda v$ для ненулевого v, то

$$\lambda\,(v,v) = (\lambda v, v) = (F^\times F v, v) = (Fv, Fv)\,,$$

откуда либо $Fv \neq 0$ и $\lambda = (Fv, Fv)/(v,v) > 0$, либо $\lambda = 0$ и $v \in \ker F$, что означает необратимость F. □

Теорема 16.2 (полярное разложение)
Любой обратимый линейный оператор F, действующий на конечномерном эрмитовом пространстве W, допускает единственное разложение в композицию $F = S_1U_1$ и единственное разложение в композицию $F = U_2S_2$, в которых операторы U_1, U_2 унитарны, а операторы S_1, S_2 самосопряжены и имеют положительные собственные числа.

[1] См. предл. 16.1 на стр. 265.

Доказательство. Приведём $FF^\times$ и $F^\times F$ к диагональному виду и обозначим через $S_1 = \sqrt{FF^\times}$, $S_2 = \sqrt{F^\times F}$, диагональные операторы, получающиеся извлечением положительных квадратных корней из стоящих на диагонали положительных вещественных чисел. Полученные таким образом операторы $S_{1,2}$ тоже самосопряжены и имеют положительные собственные числа. Кроме того, S_1 коммутирует с $FF^\times$ и удовлетворяет соотношению $S_1^2 = FF^\times$, а S_2 коммутирует с $F^\times F$ и удовлетворяет соотношению $S_1^2 = F^\times F$. Положим $U_1 = S_1^{-1}F$ и $U_2 = FS_2^{-1}$. Равенства

$$U_1U_1^\times = S_1^{-1}FF^\times S_1^{-1} = S_1^{-2}FF^\times = E \quad \text{и} \quad U_2^\times U_2 = S_2^{-1}F^\times FS_2^{-1} = S_2^{-2}F^\times F = E$$

показывают, что оба они унитарны. Это доказывает существование полярных разложений.

Докажем единственность разложения $F = S_1U_1$ (единственность разложения $F = U_2S_2$ устанавливается аналогично). Из равенства $U_1^\times = U_1^{-1}$ вытекает, что $F^\times F = S_1^2$. Поэтому оператор S_1 перестановочен с $FF^\times$, и по предл. 9.8 на стр. 157 S_1 и $FF^\times$ одновременно приводятся к диагональному виду. Поскольку все собственные значения S_1 положительны, действие оператора S_1 на каждом собственном подпространстве V_μ оператора $FF^\times$ скалярно и заключается в умножении на $\sqrt{\mu}$. Так как пространство W является прямой суммой пространств V_μ, действие оператора S_1 на W тем самым однозначно определено и этот оператор совпадает с построенным нами выше. Но тогда и $U_1 = FS_1^{-1}$ тоже совпадает с построенным выше. □

Пример 16.3

Практическое отыскание полярного разложения производится при помощи техники, описанной в n° 9.3.1 на стр. 160. Найдём, к примеру, полярное разложение $F = US$ оператора F на эрмитовой координатной плоскости $\mathbb{C}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу оператора $F^\times F$:

$$\begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2(1-i) & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{9} & -\frac{16}{9}(1-i) \\ -\frac{16}{9}(1+i) & \frac{17}{9} \end{pmatrix}$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F^\times F) = t^2 - 10t + 9 = (t-1)(t-9)$. Согласно n° 9.3.1, $\sqrt{F^\times F} = aF^\times F + bE$, где линейный двучлен $p(t) = at + b$ имеет $p(1) = 1$ и $p(9) = 3$, откуда $a = 1/4$, $b = 3/4$. Таким образом,

$$S = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{73}{9} & -\frac{16}{9}(1-i) \\ -\frac{16}{9}(1+i) & \frac{17}{9} \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} & -\frac{4}{9}(1-i) \\ -\frac{4}{9}(1+i) & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

$$U = FS^{-1} = \begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{27} & \frac{4}{27}(1-i) \\ \frac{4}{27}(1+i) & \frac{25}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1+i) & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix}.$$

16.5. Экспоненциальное отображение. Алгебра аналитических функций[1] $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ алгебраически вычислима[2] на любом $\mathbb{C}$-линейном операторе $F : W \to W$ на комплексном векторном

[1]Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *аналитической*, если она является сумой абсолютно сходящегося всюду в $\mathbb{C}$ степенного ряда.

[2]См. n° 9.3.1 на стр. 160.

пространстве W. В частности, для любого оператора F определена экспонента $e^F : W \to W$. Если пространство W эрмитово, а оператор F антиэрмитов, то он диагонализуем в некотором ортонормальном базисе $e_1, \dots , e_n$ пространства W и имеет чисто мнимые собственные числа $i\varphi_1, \dots , i\varphi_n$. Как мы видели в доказательстве теор. 9.3 на стр. 160, в этом случае оператор e^F переводит каждое собственное подпространство $W_{i\varphi} = K_{i\varphi}$ оператора F в себя и действует на нём умножением на $e^{i\varphi}$. Мы заключаем, что оператор e^F диагонализуем в том же ортонормальном базисе, что и F, и все его собственные числа $e^{i\varphi_1}, \dots , e^{i\varphi_n}$ лежат на единичной окружности. Тем самым, оператор e^F унитарен. Так как каждый унитарный оператор имеет указанный вид в подходящем ортонормальном базисе, мы заключаем, что экспоненциальное отображение

$$\exp\colon\ \mathrm{End}^-(W) \twoheadrightarrow U(W)\,, \quad F \mapsto e^F\,, \tag{16-20}$$

сюрьективно отображает вещественное векторное пространство антиэрмитовых матриц на унитарную группу.

В частности, полярное разложение $F = SU$ оператора $F \in \mathrm{GL}(W)$ можно записать в виде $F = Se^{iT}$, где S, T самосопряжены и S положителен, однако в отличие от унитарного оператора U, самосопряжённый оператор T, такой, что $e^{iT} = U$, определён уже не однозначно, так как экспонента не инъективна: например, $e^{2\pi i \mathrm{Id}} = \mathrm{Id} = e^0$.

Упражнение 16.4 (по анализу). Убедитесь, что отображение (16-20) непрерывно и дифференцируемо в каждой точке, и вычислите его производную.

Из этого упражнения среди прочего вытекает, что унитарная группа линейно связна[1].

[1] См. упр. 16.2 на стр. 267.

Упр. 16.2. Стандартная эрмитова структура[1] на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, рассматриваемом как n^2-мерное комплексное координатное пространство, сопоставляет паре матриц $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ число $(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{ij} a_{ij}\overline{b}_{ij} = \mathrm{tr}\, AB^{\times}$, где $B^{\times} = (b^{\times}_{ij}) = \overline{B}^t$ имеет $b^{\times}_{ij} = \overline{b}_{ji}$. Так как унитарная матрица U имеет $U^{\times} = U^{-1}$, её эрмитова длина $\sqrt{(U, U)} = \sqrt{n}$. Тем самым, группа U_n ограничена. Она замкнута в силу того, что задаётся системой квадратных уравнений на матричные элементы, возникающей из матричного равенства $U^t\overline{U} = E$. Диагональная матрица D с диагональными элементами вида $e^{i\vartheta}$ соединяется с единичной матрицей E гладким путём $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{U}_n$, образ которого состоит из диагональных матриц того же вида с $\vartheta \to 0$. Поскольку произвольная унитарная матрица F записывается как $F = CDC^{-1}$ для некоторого $C \in \mathrm{U}_n$, путь $t \mapsto C\cdot\gamma(t)\cdot C^{-1}$ целиком лежит в U_n и соединяет F с E.

Упр. 16.3. Числа $\pm a$ с учётом их кратностей суть все корни характеристического многочлена χ_F оператора F.

Упр. 16.4. Покажите, что правило $\|F\| = \max_{\|w\|=1} \|Fw\| = \max_{w\neq 0} \|Fw\| / \|w\|$ задаёт на овеществлении пространства $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ норму[2]: положительность и однородность очевидны, неравенство треугольника вытекает из неравенства треугольника для эрмитовой нормы: $\|F + G\| = \max_{\|w\|=1} \|Fw + Gw\| \leqslant \max_{\|w\|=1}\big(\|Fw\| + \|Gw\|\big) \leqslant \max_{\|w\|=1} \|Fw\| + \max_{\|w\|=1} \|Gw\| = \|F\| + \|G\|$. Эта норма удовлетворяет неравенству

$$\|FG\| = \max_{w\neq 0} \frac{\|FGw\|}{\|w\|} = \max_{Gw\neq 0} \left(\frac{\|FGw\|}{\|Gw\|}\cdot\frac{\|Gw\|}{\|w\|}\right) \leqslant \leqslant \max_{Gw\neq 0} \frac{\|FGw\|}{\|Gw\|}\cdot\max_{w\neq 0}\frac{\|Gw\|}{\|w\|} \leqslant \max_{v\neq 0}\frac{\|Fv\|}{\|v\|}\cdot\|G\| = \|F\|\cdot\|G\|,$$

которое вместе с неравенством треугольника позволяет мажорировать норму остатка экспоненциального ряда $e^F = \sum_{m\geqslant 0} F^m / m!$ сходящейся геометрической прогрессией также, как это делается в начальном курсе анализа для экспонент действительных чисел, и дословно те же рассуждения с заменой модуля действительного числа на норму оператора показывают, что экспоненциальный ряд абсолютно сходится всюду на пространстве линейных операторов и задаёт дифференцируемую функцию $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \to \mathrm{GL}(W)$, $X \mapsto e^X$, производная которой в точке $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ — это линейный оператор e^F.

[1]См. прим. 15.2 на стр. 249.

[2]Нормой на вещественном векторном пространстве V называется такая функция $V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $v \mapsto \|v\|$, что $\|v\| > 0$ для $v \neq 0$, выполняется неравенство треугольника: $\|u+w\| \leqslant \|u\|+\|w\|$ для всех $u, w \in V$, и $\|xv\| = |x|\cdot\|v\|$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Каждая норма определяет на V метрику, и метрическая топология, задаваемая такой метрикой на конечномерном векторном пространстве V не зависит от выбора нормы. Подробности см. в лекции http://82.204.189.191/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf.