§17. Кватернионы

17.1. Три инволюции на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Обозначим через $U = \mathbb{C}^2$ двумерное эрмитово координатное пространство, а через $W = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} U = U^* \otimes U$ — четырёхмерное пространство его $\mathbb{C}$-линейных эндоморфизмов. На W есть три невырожденные формы $W \times W \to \mathbb{C}$:

- симметричная билинейная форма $\langle A , B \rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AB)$, сопоставляющая паре разложимых операторов $a \otimes \alpha$, $b \otimes \beta \in U \otimes U^*$ половину их полной свёртки $\frac{1}{2}\langle a , \beta \rangle \langle b , \alpha \rangle$

- поляризация квадратичной формы[1] $\det A = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AA^\vee)$ — симметричная билинейная форма $\widetilde{\det}(A,B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AB^\vee) = \langle A , B^\vee \rangle$, где
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\vee = \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} \tag{17-1}$$
обозначает присоединённую матрицу[2]

- стандартная эрмитова структура на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ — эрмитово симметричная полуторалинейная форма $(A,B) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AB^\times) = \langle A , B^\times \rangle$, где
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\times = \begin{pmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{21} \\ \overline{c}_{12} & \overline{c}_{22} \end{pmatrix} \tag{17-2}$$
обозначает эрмитово сопряжённую матрицу[3], на матрицах (a_{ij}) и (b_{ij}) значение
$$(A,B) = \frac{1}{2} \sum\nolimits_{ij} a_{ij} \overline{b}_{ij} \,.$$

Упражнение 17.1. Напишите матрицы Грама всех трёх форм в стандартном базисе из матричных единиц E_{ij}.

Линейная инволюция (17-1) и полулинейная инволюция (17-2) оборачивают сомножители в произведениях: $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$ и $(AB)^\times = B^\times A^\times$.

Упражнение 17.2. Проверьте первое из этих равенств[4].

Инволюции (17-1) и (17-2) коммутируют друг с другом. Их композиция сопоставляет матрице комплексно сопряжённую к матрице алгебраических дополнений и обозначается
$$\sigma : \ \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \,, \quad C \mapsto C^\sigma \overset{\text{def}}{=} C^{\vee\times} = C^{\times\vee} \,, \ \text{где}$$
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} \overline{c}_{22} & -\overline{c}_{21} \\ -\overline{c}_{12} & \overline{c}_{11} \end{pmatrix} \tag{17-3}$$

Инволюция (17-3) полулинейна и перестановочна с произведением: $(AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$.

Упражнение 17.3. Убедитесь, что и три инволюции (17-1) – (17-3) образуют вместе с тождественным преобразованием группу Клейна $V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$.

[1] См. 8-22 на стр. 140.
[2] См. n° 8.4 на стр. 140.
[3] См. n° 16.2 на стр. 265.
[4] Второе равенство было установлено нами в предл. 16.1 на стр. 265.

Полулинейная инволюция σ задаёт на пространстве $W = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ вещественную структуру[1]. Пространство её вещественных векторов обозначается через

$$\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}_\sigma(W) = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid X^\sigma = X\} \simeq \mathbb{R}^4$$

и состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_2 + i\,x_3 \\ -x_2 + i\,x_3 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\,. \tag{17-4}$$

Так как $\widetilde{\det}(A, B) = (A, B^\sigma)$, билинейная форма $\widetilde{\det}$ и эрмитова структура $(\,*\,,\,*\,)$ ограничиваются на $\mathbb{H}$ в одну и ту же вещественно билинейную симметричную положительно определённую форму, задающую на $\mathbb{H}$ евклидову структуру.

Упражнение 17.4. Убедитесь, скалярный квадрат матрицы (17-4) равен

$$\|X\|^2 = (X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\,,$$

а матрицы

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{17-5}$$

образуют ортонормальный базис в $\mathbb{H}$.

Формы $\widetilde{\det}$ и $(\,*\,,\,*\,)$ задают, соответственно, $\mathbb{C}$-билинейное и эрмитово продолжения этой евклидовой структуры с $\mathbb{H}$ на комплексификацию $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Так как инволюция σ является гомоморфизмом относительно матричного умножения, пространство её неподвижных точек $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ является $\mathbb{R}$-подалгеброй в алгебре матриц. Эта подалгебра называется *алгеброй кватернионов*. Эрмитово сопряжение матриц $X \leftrightarrow X^\times$ и переход к присоединённой матрице $X \leftrightarrow X^\vee$ переводят алгебру $\mathbb{H}$ в себя и задают на ней одну и ту же инволюцию, которая называется *кватернионным сопряжением* и обозначается звёздочкой: $q^* \stackrel{\text{def}}{=} q^\times = q^\vee$.

Упражнение 17.5. Убедитесь, что кватернионное сопряжение тождественно действует на $\boldsymbol{e}$, меняет знак у $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и оборачивает порядок сомножителей в произведении: $(pq)^* = q^* p^*$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$.

17.2. Тело кватернионов. Кватернион $\boldsymbol{e}$ является единичным элементом алгебры $\mathbb{H}$ и обычно обозначается просто 1, а в произведениях опускается вовсе. Таблица умножения остальных базисных кватернионов (17-5) такова:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1\,, \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}\,. \end{gathered} \tag{17-6}$$

Произвольная пара кватернионов перемножается по правилу

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) \cdot (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) = \\ = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + \\ + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\,\boldsymbol{i} + \\ + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)\,\boldsymbol{j} + \\ + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)\,\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{17-7}$$

[1]См. n° 15.3 на стр. 250.

Упражнение 17.6. Попробуйте убедиться прямым вычислением, что таблица умножения (17-6) задаёт на абстрактном вещественном векторном пространстве с базисом $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ структуру ассоциативной $\mathbb{R}$-алгебры.

По аналогии с комплексными числами, кватернионы из одномерного подпространства $\mathbb{R}\,\boldsymbol{e} \subset \mathbb{H}$ называются *вещественными*. Вещественность кватерниона q равносильна тому, что $q^* = q$. Трёхмерный ортогонал к вещественным кватернионам обозначается через

$$\mathbb{I} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}^{\perp} = \{x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

и называется пространством *чисто мнимых* кватернионов. Кватернион q чисто мним если и только если $q^* = -q$. На языке матриц вещественные кватернионы — это вещественные скалярные матрицы, а чисто мнимые кватернионы — это бесследные антиэрмитовы матрицы:

$$\mathbb{I} = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid X^{\times} = -X \ \& \ \operatorname{tr} X = 0\}\,.$$

Кватернионы $\operatorname{Re} q \stackrel{\text{def}}{=} (q + q^*)/2 \in \mathbb{R}\,\boldsymbol{e}$ и $\operatorname{Im} q \stackrel{\text{def}}{=} (q - q^*)/2 \in \mathbb{I}$ называются *вещественной* и *мнимой* частями кватерниона $q \in \mathbb{H}$.

17.2.1. Норма и деление. Так как $\|X\|^2 = \det X$ для всех $X \in \mathbb{H}$, длина кватернионов мультипликативна по отношению к кватернионному умножению: $\|pq\| = \|p\| \cdot \|q\|$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$. В терминах формул (17-7) равенство $\|p\|^2\|q\|^2 = \|pq\|^2$ выражается *тождеством Эйлера*[1]

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^2 +$$
$$+ (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)^2\,.$$

Поскольку эрмитово сопряжение совпадает на $\mathbb{H}$ со взятием присоединённой матрицы,

$$XX^{\times} = XX^{\vee} = \det(X)\,E = X^{\vee}X = X^{\times}X \text{ для всех } X \in \mathbb{H}\,,$$

т. е. $\|q\|^2 = qq^* = q^*q$ для всех $q \in \mathbb{H}$. Из этого соотношения вытекает, что каждый ненулевой кватернион q обратим, и $q^{-1} = q^*/\|q\|^2$ является двусторонним обратным к q.

Ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *телом*[2]. Таким образом, кватернионы образуют тело.

Упражнение 17.7. Убедитесь, что $\operatorname{Re}(pq^*) = \operatorname{Re}(p^*q) = (p, q)$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$.

17.2.2. Геометрия мнимых кватернионов. Зададим на трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{I}$ ориентацию[3], объявив положительно ориентированным базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ из форм. (17-5) на стр. 273. Напомню, что *векторным произведением*[4] $u \times w$ в ориентированном трёхмерном евклидовом пространстве V называется вектор, длина которого равна евклидовой площади параллелограмма[5], натянутого на u, w, и — если она ненулевая — направленный перпендикулярно плоскости этого параллелограмма так, что базис $u \times w, u, w$ положительно ориентирован.

[1] Которое играет важную роль в доказательстве теоремы о представимости натурального числа в виде суммы четырёх квадратов, ибо редуцирует его к анализу представимости простых чисел.

[2] Таким образом поля — это коммутативные тела.

[3] См. раздел 10.2.1 на стр. 133 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

[4] См. раздел 10.5 на стр. 138 той же лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

[5] Т. е. положительному квадратному корню из определителя матрицы Грама векторов u, w, см. формулу (10-9) из уже упомянутого раздела 10.2.1 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

Вектор $u \times w$ однозначно задаётся тем, что для всех $v \in V$ выполняется равенство

$$\omega(v, u, w) = (v, u \times w)\,,$$

где $\omega : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ — форма ориентированного объёма[1], равная единице на положительно ориентированном ортонормальном базисе. Из второго описания вытекает, что координатами вектора $u \times w$ в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ пространства V являются алгебраические дополнения к элементам первой строки 3×3 матрицы, по строкам корой написаны координаты векторов v, u, w в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, т. е.

$$u \times w = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$
$$\text{для} \quad u = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad w = (y_1, y_2, y_3)\,.$$

Сравнивая это с форм. (17-7) на стр. 273, заключаем, что для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{I}$

$$\mathrm{Re}(q_1q_2) = -(q_1, q_2)\,, \quad \mathrm{Im}(q_1q_2) = q_1 \times q_2\,. \tag{17-8}$$

Лемма 17.1

Произвольные $p, q \in \mathbb{H}$ ортогональны если и только если $pq^* \in \mathbb{I}$. Ортогональность чисто мнимых кватернионов $p, q \in \mathbb{I}$ равносильна равенству $pq = -qp$, и в этом случае кватернион $pq = -qp$ тоже чисто мним и ортогонален плоскости, натянутой на p и q.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из упр. 17.7, остальные — из формул (17-8). □

Лемма 17.2

Множество решений уравнения $x^2 = -1$ в теле $\mathbb{H}$ представляет собою двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{I}$, состоящую из чисто мнимых кватернионов единичной длины.

Доказательство. Если $q^2 = -1$, то $\|q\|^2 = \|-1\|^2 = 1$ и $q^* = q^{-1} = -q$. □

Упражнение 17.8. Убедитесь, что уравнение $x^2 = 1$ имеет в $\mathbb{H}$ ровно два решения $x = \pm 1$.

Лемма 17.3

Кватернионы $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{H}$ тогда и только тогда удовлетворяют соотношениям (17-6):

$$\boldsymbol{l}^2 = \boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{n}^2 = -1\,,$$
$$\boldsymbol{lm} = -\boldsymbol{ml} = \boldsymbol{n}\,, \quad \boldsymbol{mn} = -\boldsymbol{nm} = \boldsymbol{l}\,, \quad \boldsymbol{nl} = -\boldsymbol{ln} = \boldsymbol{m}$$

когда они образуют положительно ориентированный ортонормальный базис в $\mathbb{I}$.

Доказательство. Из верхней строки вытекает, что все три кватерниона чисто мнимы длины 1, а из нижней — что $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{l}$. □

[1] Т. е. трилинейная кососимметричная форма, см. раздел 8.1 на стр. 95 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_08.pdf.

17.3. Универсальное накрытие $SU_2 \to SO_3$. Кватернионы единичной длины образуют трёхмерную сферу $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$. На языке матриц, условие $X \in S^3$ означает, что $\det X = 1$, откуда $X^\times = X^\vee = X^{-1}$. Мы заключаем, что $S^3 = SU_2$ — это двумерная специальная унитарная группа[1]. Она действует на теле $\mathbb{H}$ сопряжениями

$$\mathrm{Ad}_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad h \mapsto qhq^{-1} = qhq^*, \quad \text{где} \quad q \in SU_2 \subset \mathbb{H}. \tag{17-9}$$

Упражнение 17.9. Убедитесь, что $\mathrm{Ad} : SU_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, $q \mapsto \mathrm{Ad}_q$, является гомоморфизмом группы SU_2 в группу автоморфизмов[2] тела кватернионов.

Так как $\det(qhq^{-1}) = \det h$, оператор Ad_q сохраняет евклидово скалярное произведение на $\mathbb{H}$, а так как $\mathrm{Ad}_q(1) = 1$, оператор Ad_q переводит трёхмерное подпространство $\mathbb{I} = 1^\perp \subset \mathbb{H}$ в себя. Поскольку непрерывная функция $\det \mathrm{Ad} : S^3 \to \{\pm 1\}$, $q \mapsto \det \mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}}$, постоянна и равна 1 при $q = 1$, ортогональный оператор $\mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ собственный. Мы получаем гомоморфизм групп

$$S^3 = SU_2 \to SO_3(\mathbb{R}) = SO(\mathbb{I}), \quad q \mapsto \mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}}. \tag{17-10}$$

Из равенств $\mathrm{Ad}_q(1) = 1$, $\mathrm{Ad}_q(q) = q$ вытекает, что при $q \neq 1$ оператор Ad_q тождественно действует на двумерной плоскости $\Pi_q = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(1, q)$. Мы заключаем, что ограничение $\mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}}$ является вращением вокруг прямой $\ell_q = \Pi_q \cap \mathbb{I}$. Зафиксируем на этой прямой один из двух (различающихся знаком) чисто мнимых кватернионов $\boldsymbol{l}$ единичной длины и отождествим плоскость Π_q с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ по правилу

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \Pi_q, \quad x + iy \mapsto x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{l}y. \tag{17-11}$$

В результате такого отождествления каждый кватернион $p \in \Pi_q \simeq \mathbb{C}$ приобретает *аргумент*

$$\alpha = \mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, p \in \mathbb{R} : \ p = \cos\alpha + \boldsymbol{l}\sin\alpha.$$

При этом $p^{-1} = p^* = \cos \mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, p - \boldsymbol{l} \sin \mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, p$.

Лемма 17.4
Оператор $\mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}} \in SO(\mathbb{I})$ является поворотом вокруг прямой ℓ_q на угол $2\,\mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}(q)$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль зафиксированного выше единичного вектора $\boldsymbol{l} \in \ell_q$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, q = \alpha$. Дополним $\boldsymbol{l}$ до положительно ориентированного ортонормального базиса $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ пространства $\mathbb{I}$. По лем. 17.3 на стр. 275 таблица умножения кватернионов $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ такая же, как у $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ из форм. (17-6) на стр. 273. Поэтому

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{m}q^{-1} &= (\cos\alpha + \boldsymbol{l}\sin\alpha)\boldsymbol{m}(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = (\boldsymbol{m}\cos\alpha + \boldsymbol{n}\sin\alpha)(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = \\ &= \boldsymbol{m}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\boldsymbol{n}\cos\alpha\sin\alpha = \boldsymbol{m}\cos(2\alpha) + \boldsymbol{n}\sin(2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{n}q^{-1} &= (\cos\alpha + \boldsymbol{l}\sin\alpha)\boldsymbol{n}(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = (\boldsymbol{n}\cos\alpha - \boldsymbol{m}\sin\alpha)(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = \\ &= \boldsymbol{n}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\boldsymbol{m}\cos\alpha\sin\alpha = \boldsymbol{n}\cos(2\alpha) - \boldsymbol{m}\sin(2\alpha), \end{aligned}$$

т. е. действие оператора Ad_q на векторы $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$. □

[1] См. n° 16.1.5 на стр. 262.

[2] Т. е. биекций, перестановочных со сложением, умножением, вычитанием и делением.

Следствие 17.1
Гомоморфизм (17-10) сюрьективен и имеет ядро $\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

Доказательство. Для каждого ненулевого вектора v и угла $\varphi \in [0, 2\pi]$ поворот по часовой стрелке на угол φ вокруг оси направленной по вектору v представляется как поворот на угол 2α в ту же сторону вокруг той же оси ровно для двух углов $\alpha = \varphi/2$ и $\alpha = \pi + \varphi/2$. □

Замечание 17.1. (топологическое) С топологической точки зрения, гомоморфизм (17-10) является двулистным накрытием, склеивающим между собою диаметрально противоположные точки сферы $S^3 \subset \mathbb{H}$. Результатом такой склейки является трёхмерное вещественное проективное пространство[1] $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{H})$. Таким образом, накрытие (17-10) задаёт гомеоморфизм между $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ и $SO_3(\mathbb{R})$. Так как сфера S^3 *односвязна*[2], а группа $SO_3(\mathbb{R})$ линейно связна, накрытие (17-10) является *универсальным*. В частности, $\pi_1(SO_3) = \mathbb{Z}/(2)$. Это равенство означает, что в группе SO_3 имеется нестягиваемая петля, квадрат которой стягиваем. Эту петлю можно увидеть и почувствовать: держа на ладони книгу, непрерывным движением руки поворачиваем её на 360° так, чтобы книга в течение всей манипуляции оставалась горизонтальной, как показано на[3] рис. 17◇1 (первый столбец сверху вниз). Изогнутая рука задаёт петлю в SO_3, и напряжение локтевого сустава красноречиво свидетельствует о её нестягиваемости. Если превозмочь неприятное ощущение и продолжить вращение книгу дальше в том же направлении (второй столбец снизу вверх), то после ещё одного полного оборота скрученный локоть полностью распрямится. Неформально говоря, взятие прообраза при накрытии (17-10) означает «извлечение корня» из вращения трёхмерного пространства, и два различающихся знаком значения этого корня являются диаметрально противоположными точками трёхмерной сферы или, что то же самое, отличающимися знаком унитарными операторами из SU_2.

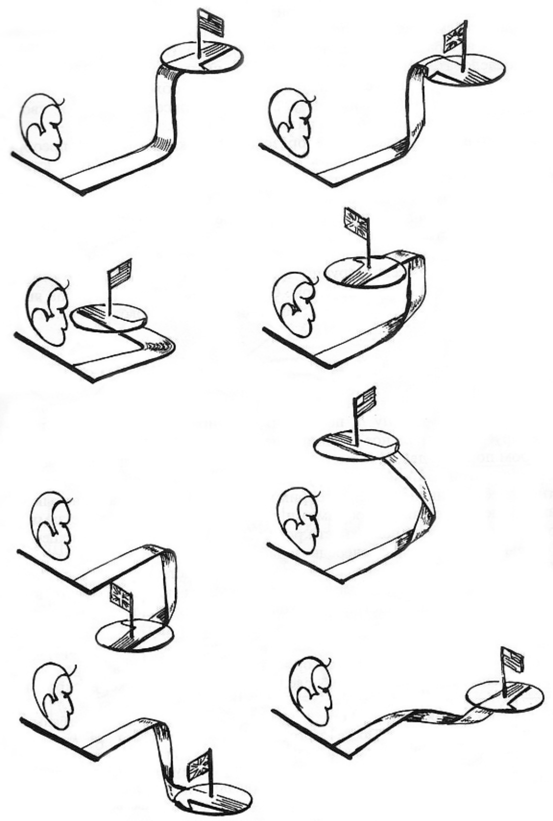

Рис. 17◇1. Образующая $\pi_1(SO_3) = \mathbb{Z}/(2)$.

Пример 17.1 (гурвицевы кватернионы и бинарная группа тетраэдра)
Восемь кватернионов $\pm 1, \pm \boldsymbol{i}, \pm \boldsymbol{j}, \pm \boldsymbol{k}$, составляющих мультипликативную группу Q_8, располагаются в вершинах стандартного четырёхмерного октаэдра. Пропорциональные центрам шестнадцати его трёхмерных граней кватернионы $(\pm 1 \pm \boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{j} \pm \boldsymbol{k})/2$ располагаются в вершинах

[1] Ср. с примером 16.3 на стр. 207 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf.

[2] Т. е. фундаментальная группа $\pi_1(S^3)$ единичная.

[3] Рисунок взят из книги *Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии*. М. «Мир» 1991.

вписанного в единичную сферу $S^3 \subset \mathbb{H}$ четырёхмерного куба, гомотетичного стандартному. Целочисленная линейная оболочка этих 24 кватернионов, т. е. кватернионы $x_1+x_2\boldsymbol{i}+x_3\boldsymbol{j}+x_4\boldsymbol{k}$, координаты x_i которых либо все целые, либо все полуцелые, образует подкольцо в $\mathbb{H}$.

Упражнение 17.10. Углядите это из форм. (17-7) на стр. 273.

Оно обозначается через H и называется кольцом *целых* или *гурвицевых* кватернионов. Целые кватернионы минимальной ненулевой длины 1 — это в точности 24 перечисленных выше кватерниона. Тем самым, они образуют мультипликативную группу $\mathfrak{T} \overset{\text{def}}{=} H^\times$ обратимых элементов кольца H, транзитивно действующую на себе левым умножениями, кои являются ортогональными преобразованиями $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$. Универсальное накрытие (17-10):

$$\mathrm{Ad}: \ \mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{I}), \quad q \mapsto \mathrm{Ad}_q ,$$

переводит группу $\mathfrak{T}$ в собственную группу $T \subset \mathrm{SO}_3$ правильного тетраэдра. В самом деле, по сл. 17.1 шесть кватернионов $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ задают в $\mathbb{I}$ три поворота на угол π вокруг осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а 16 кватернионов $(\pm 1 \pm \boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{j} \pm \boldsymbol{k})/2$ — восемь поворотов на углы $\pm 2\pi/3$ вокруг четырёх осей, порождённых векторами $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Упражнение 17.11. Убедитесь, что кватернион $q = (1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/2$ имеет аргумент $\pm\pi/3$ в зависимости от знака выбранного в плоскости Π_q чисто мнимого кватерниона $\boldsymbol{l}$ длины[1] 1.

Эти 11 поворотов вместе с тождественным отображением образуют группу вращений двух центрально симметричных друг другу тетраэдров с вершинами в центрах граней стандартного трёхмерного октаэдра с вершинами $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$. Если раскрасить грани октаэдра в шахматном порядке, то один из тетраэдров будет иметь вершины в центрах белых граней

$$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3\,, \quad (\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3\,, \quad (-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3\,, \quad (-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3\,,$$

а другой — в центрах чёрных граней

$$(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3\,, \quad (-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3\,, \quad (\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3\,, \quad (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3$$

(обратите внимание, что у первого тетраэдра чётное число минусов в каждой вершине, у второго — нечётное). По этой причине группу $\mathfrak{T}$ называют *бинарной группой тетраэдра*.

Упражнение 17.12. Постройте коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{T} \arrow[d, two heads] \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \arrow[r, "\sim"] & T\,, \end{tikzcd}$$

где горизонтальные стрелки — изоморфизмы, а вертикальные — факторизации по ± 1.

Пример 17.2 (бинарная группа октаэдра)

Собственная группа O трёхмерного октаэдра с вершинами $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ получается расширением собственной группы тетраэдра T, вложенной в O как нормализатор[2] белых граней[3] при помощи шести поворотов на углы $\pm\pi/2$ вокруг осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и шести поворотов на угол π вокруг осей,

[1] См. формулу (17-11) на стр. 276.

[2] См. n° 10.4 на стр. 177.

[3] Совпадающий с нормализатором чёрных граней.

проходящих через середины противоположных рёбер октаэдра. По лем. 17.4 эти 12 поворотов задаются 24 кватернионами $(\pm\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{n})/\sqrt{2}$, где $\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\}$ пробегает неупорядоченные пары различных базисных кватернионов[1] ±1, $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$. Добавляя эти 24 кватерниона к 24 кватернионам группы $\mathfrak{T}$ получаем мультипликативную подгруппу $\mathfrak{O} \subset \mathbb{H}$ из 48 элементов, которая называется *бинарной группой октаэдра*.

Пример 17.3 (бинарная группа икосаэдра)

Если вписать икосаэдр в стандартный куб, как на рис. 17◇2, то центры красных рёбер попадут в вершины стандартного октаэдра. Выбрать три пары противоположных рёбер икосаэдра с центрами в вершинах октаэдра можно пятью способами — при каждом таком выборе на каждой из 12 пятиугольных «тюбетеек» икосаэдра, образованных пятью гранями с общей вершиной, отмечается ровно два ребра: одно идёт из центра тюбетейки в одну из её вершин, а другое соединяет две противоположные вершины на периметре тюбетейки, поэтому выбор любого из пяти лучей какой-либо фиксированной тюбетейки однозначно продолжается на весь икосаэдр. Группа икосаэдра транзитивно действует на пяти тройках перпендикулярных осей, проходящих через средины отмеченных рёбер, и стабилизатор каждой тройки состоит из 12 вращений соответствующего октаэдра, нормализующих оба ассоциированных с ним тетраэдра с вершинами на чёрных и белых гранях. Мы заключаем, что группа вращений икосаэдра является произведением $I = TC$ группы T тетраэдра, ассоциированного с октаэдром с вершинами $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$, и циклической группы C вращений на кратные $2\pi/5$ углы вокруг оси SN на рис. 17◇3, где изображена проекция рис. 17◇2 на верхнюю грань куба[2].

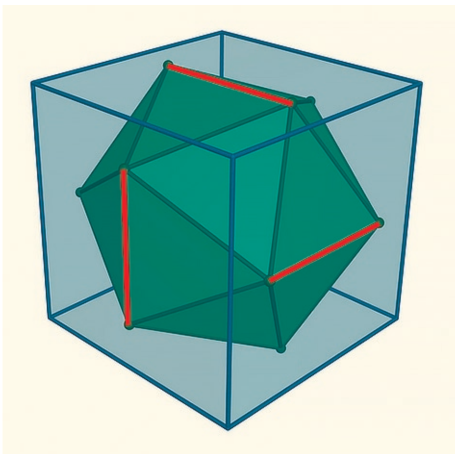

Рис. 17◇2. Три пары противоположных рёбер.

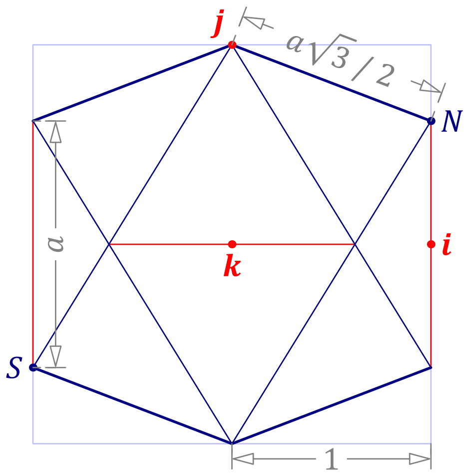

Рис. 17◇3. Проекция на грань куба.

Упражнение 17.13. Обозначим *золотое сечение* через $\vartheta = (1+\sqrt{5})/2$. Убедитесь, что сторона икосаэдра на рис. 17◇3 равна $a = \sqrt{5}-1 = 2\vartheta^{-1}$, а направленный в сторону N единичный вектор оси SN равен $(\vartheta\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})/\sqrt{1+\vartheta^2}$.

[1]Поворотам на $\pm\pi/2$ отвечают три пары, содержащие 1.

[2]Красным нарисованы проекции отмеченных рёбер, жирным синим — проекции четырёх граней икосаэдра, перпендикулярных верхней грани куба.

Таким образом *бинарная группа икосаэдра* $\mathfrak{J} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ad}^{-1}(I) \subset \mathrm{SU}_2$ является произведением $\mathfrak{J} = \mathfrak{T}\mathfrak{C}$ бинарной группы тетраэдра $\mathfrak{T}$ и циклической подгруппы $\mathfrak{C} \subset \mathrm{SU}_2$, порождённой кватернионом

$$c = \cos\frac{\pi}{5} + \frac{\vartheta \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}{\sqrt{1+\vartheta^2}} \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\vartheta}{2} + (\vartheta \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\sqrt{\frac{1-\vartheta^2/4}{1+\vartheta^2}} = \frac{1}{2}(\vartheta + \boldsymbol{i} + \vartheta^{-1}\boldsymbol{j})\,. \tag{17-12}$$

Упражнение 17.14. Убедитесь, что помимо 24 кватернионов из группы $\mathfrak{T}$ группа $\mathfrak{J}$ содержит ещё 96 кватернионов, которые можно получить из c чётными перестановками базисных векторов $\{1,\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ и произвольным выбором знака при каждом из них.

17.4. Универсальное накрытие $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_4$. Отображение $\sigma_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto -h^*$, является отражением в гиперплоскости $1^\perp = \mathbb{I}$. Так как левое умножение $q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto qh$, на кватернион $q \in \mathrm{SU}_2$ является ортогональным линейным преобразованием $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и переводит 1 в q, отражение $\sigma_q = q\sigma_1 q^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ в гиперплоскости $q^\perp$ действует по правилу

$$\sigma_q : h \mapsto -q(q^{-1}h)^* = -qh^*q\,.$$

У сопряжения из форм. (17-9) на стр. 276 есть бивариантная версия: сопоставим каждой паре кватернионов $p, q \in \mathrm{SU}_2$ ортогональное преобразование $\varphi_{pq} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto phq^{-1} = phq^*$.

Предложение 17.1
Отображение $\varphi :\ \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_4 = \mathrm{SO}(\mathbb{H})$, $(p, h) \mapsto \varphi_{pq}$, является сюрьективным гомоморфизмом групп с ядром $\{\pm(1,1)\} \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

Доказательство. Из курса геометрии известно, что всякое собственное ортогональное преобразование $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ является композицией чётного числа отражений σ_q с $q \in S^3$. Так как

$$\sigma_p \sigma_q : h \mapsto pq^*hq^*p = \varphi_{rs}(h)$$

для $r = pq^*$, $s = p^*q$, гомоморфизм φ сюрьективен. Если $phq^* = h$ для всех $h \in \mathbb{H}$, то полагая $h = 1$, заключаем, что $q = p^* = p^{-1}$, откуда $p = \pm 1$ по сл. 17.1. □

17.4.1. Конечные группы отражений. Конечная группа линейных ортогональных преобразований евклидова пространства называется *группой отражений* или *группой Коксетера*[1], если она порождается отражениями в гиперплоскостях. Такая группа G однозначно задаётся указанием зеркал всех входящих в неё отражений или, что равносильно, указанием для каждого зеркала пары перпендикулярных ему векторов $\pm e$ единичной длины. Эти векторы называются *корнями* группы G, а их совокупность — *системой корней* и обозначается $\Phi(G)$. Поскольку каждый элемент $g \in G$ переводит отражение $\sigma_e \in G$ в ортогонале к корню $e \in \Phi(G)$ в отражение $\sigma_{g(e)} = g\sigma_e g^{-1} \in G$ в ортогонале к вектору $g(e)$, система корней переводится в себя всеми преобразованиями из G. Наоборот, если имеется такой конечный набор Φ векторов единичной длины, что для каждого $e \in \Phi$

$$\Phi \cap \mathbb{R}\, e = \{\pm e\} \quad \text{и} \quad \sigma_e(\Phi) = \Phi\,, \tag{17-13}$$

то отражения в гиперплоскостях $e^\perp$, где $e \in \Phi$, порождают конечную группу отражений в евклидовом пространстве $\operatorname{span}\Phi$. Конечный набор Φ единичных векторов со свойствами (17-13) называется *абстрактной системой корней*.

[1]Подробнее про такие группы можно прочитать в разделе 7.3 на стр. 118 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_07.pdf или в брошюре: *Е. Ю. Смирнов*. *Группы отражений и правильные многогранники*. М., МЦНМО, 2009.

Предложение 17.2
Каждая конечная мультипликативная подгруппа $G \subset \mathbb{H}$ чётного порядка является системой корней в $\mathbb{H}$.

Доказательство. Так как $g^{|G|} = 1$ для всех $g \in G$, все элементы группы имеют единичную длину, т. е. $G \subset \mathrm{SU}_2$. Поскольку G содержит силовскую 2-подгруппу, а в каждой 2-подгруппе есть элемент порядка[1] 2, существует отличный от 1 элемент $g \in G$ с $g^2 = 1$. По упр. 17.8 на стр. 275 этот $g = -1$. Тем самым, $-1 \in G$. Тогда для любых $g, h \in G$

$$\sigma_g(h) = -gh^*g = -gh^{-1}g \in G\,.$$

Если $xg \in G$ для некоторых $g \in G$ и $x \in \mathbb{R}$, то $x \in G$, откуда $|x| = 1$. Тем самым, оба свойства (17-13) выполняются. □

17.5. Два семейства комплексных структур на $\mathbb{H}$. По лем. 17.2 на стр. 275 операторы левого и правого умножения на чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{n}$ единичной нормы

$$\begin{aligned} I'_{\boldsymbol{n}} &: \mathbb{H} \to \mathbb{H}\,, \quad q \mapsto \boldsymbol{n}q\,, \\ I''_{\boldsymbol{n}} &: \mathbb{H} \to \mathbb{H}\,, \quad q \mapsto q\boldsymbol{n}\,, \end{aligned} \tag{17-14}$$

являются ортогональными и задают на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{H}$ комплексные структуры[2]. Таким образом, на $\mathbb{H}$ имеется два семейства эрмитовых структур, согласованных с евклидовым скалярным произведением[3], и каждое из них биективно параметризуется точками единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{I}$ чисто мнимых кватернионов длины 1.

Упражнение 17.15. Убедитесь, что все эти структуры различны.

17.5.1. Чистые спиноры. Согласно предл. 15.5, комплексные структуры на $\mathbb{H}$, продолжающие евклидово скалярное произведение до кэлеровой тройки, биективно соответствуют двумерным изотропным подпространствам $\mathbb{C}$-билинейной формы $\widetilde{\det}$ на $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Проективизации этих подпространств являются прямыми на квадрике Сегре[4]

$$S = \{X \in \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})) \mid \det X = 0\} \simeq \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*)\,.$$

Как мы видели в прим. 13.4 на стр. 213, эти прямые разбиваются на два семейства, которые биективно параметризуются точками двух комплексных проективных прямых $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$, где $U = \mathbb{C}^2$ — двумерное эрмитово пространство, алгеброй линейных эндоморфизмов которого является рассматриваемая нами алгебра матриц[5] $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$. Точки прямых $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_1^\times$ называются *чистыми спинорами* (противоположной *киральности*[6]). Между

[1] Пусть $|G| = 2^n$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$ и $g \in G$ имеет порядок 2^k. Если $k < n$, то по индукции в циклической 2-подгруппе, порождённой g, есть элемент порядка 2. Если $k = n$, то $g^{2^{n-1}}$ имеет порядок 2.

[2] См. n° 15.4 на стр. 251.

[3] См. n° 15.5.1 на стр. 254.

[4] См. прим. 13.4 на стр. 213.

[5] См. самое начало n° 17.1 на стр. 272.

[6] Термин «киральность» происходит от греческого $\chi\varepsilon\varrho\iota$ (рука) и является калькой с английского *chirality*, отражающего принадлежность к одному из двух зеркально симметричных классов, как левая и правая руки. Этимология использованных тут названий отчасти объясняется в §§ 9, 11 второй части книги: *А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. Линейная алгебра и геометрия*. М., изд. МГУ, 1980, стр. 176, и в §3.6 книги: *Дж. Х. Конвей, Д. А. Смит. О кватернионах и октавах*. М., МЦНМО, 2009, стр. 46.

двойственными прямыми $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_1^\times$ имеется канонический проективный изоморфизм

$$\delta : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*) , \quad u \mapsto \det(\,*\,, u) , \tag{17-15}$$

переводящий точку $u \in \mathbb{P}_1$ в единственную с точностью до пропорциональности ненулевую линейную форму[1] $w \mapsto \det(w, u)$, которая зануляется в этой точке. В стандартных координатах на $\mathbb{C}^2$ изоморфизм (17-15) переводит точку $z = (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}_1$ в точку $z^\delta = (z_1 : -z_0) \in \mathbb{P}_1^\times$.

Покажем, что комплексные структуры на $\mathbb{H}$, задаваемые изотропными подпространствами $z \otimes U^*$ и $U \otimes z^\delta$ формы det на $U \otimes U^* = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ имеют вид (17-14) для однозначно определяемого точкой $z = (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}(U)$ чисто мнимого кватерниона $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(z)$ единичной длины. Пространство $z \otimes U^*$ содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{17-16}$$

Поэтому сопряжённое ему относительно вещественной структуры[2] σ на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ пространство содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{z}_1 \\ 0 & \overline{z}_0 \end{pmatrix} . \tag{17-17}$$

Если существует такая матрица $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, что матрицы (17-16) и (17-17) являются собственными с собственными числами i и $-i$ для оператора левого умножения на X

$$\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) , \quad Y \mapsto XY ,$$

то столбцы матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & -\overline{z}_1 \\ z_1 & \overline{z}_0 \end{pmatrix} \tag{17-18}$$

являются собственными векторами линейного оператора $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ с матрицей X в стандартном базисе. Так как матрица этого оператора в базисе пространства $\mathbb{C}^2$, образованном столбцами матрицы (17-18), диагональна с элементами $(i, -i)$ на диагонали, мы заключаем, что[3]

$$X = Z \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z^{-1} = \frac{i}{\|z\|^2} \begin{pmatrix} z_0 & -\overline{z}_1 \\ z_1 & \overline{z}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_0 & \overline{z}_1 \\ z_1 & -z_0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\|z\|^2} \begin{pmatrix} |z_0|^2 - |z_1|^2 & 2z_0\overline{z}_1 \\ 2\overline{z}_0 z_1 & |z_1|^2 - |z_0|^2 \end{pmatrix} .$$

Это бесследная антиэрмитова матрица определителя 1, т. е. чисто мнимый кватернион длины 1.

Упражнение 17.16. Убедитесь, что подпространства $z \otimes U^*$ и $U^* \otimes z^\delta$ действительно являются собственными с собственным числом i для операторов $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, задаваемых, соответственно, левым и правым умножениями на матрицу X.

Таким образом, все комплексные структуры на четырёхмерном вещественном пространстве $\mathbb{H}$, продолжающие евклидово скалярное произведение на $\mathbb{H}$ до кэлеровой тройки, распадаются на два непересекающихся семейства, каждое из которых параметризуется точками римановой

[1] Через $\det(w, u)$ обозначен определитель матрицы координат векторов $u, w \in U$ в каком-либо базисе, и при выборе другого базиса эта форма умножается на ненулевую константу.

[2] См. формулу (17-3) на стр. 272.

[3] См. упр. 5.29 на стр. 104.

сферы $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$ так, что точке $z = (z_0 : z_1)$ отвечают две комплексные структуры (17-14), задаваемые левым и правым умножением на чисто мнимый кватернион единичной длины

$$\boldsymbol{n}(z) = \frac{i}{\|z\|^2}\begin{pmatrix} |z_0|^2 - |z_1|^2 & 2z_0\overline{z}_1 \\ 2\overline{z}_0 z_1 & |z_1|^2 - |z_0|^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})\,. \tag{17-19}$$

Упражнение 17.17. Каким точкам $z \in \mathbb{P}_1$ отвечают комплексные структуры $I, J, K : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, задаваемые левыми умножениями на $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$?

17.5.2. Расслоение Хопфа. Комплексная проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ является фактором множества $\mathbb{C}^2 \smallsetminus 0$ по действию мультипликативной группы $\mathbb{C}^\times$ скалярными гомотетиями. Так как $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^\times_{>0} \times \mathrm{U}(1)$, факторизацию можно осуществить в два приёма: сначала рассмотреть фактор по действию вещественных растяжений, а потом дофакторизовать его по действию U_1. Орбиты группы вещественных растяжений $\mathbb{R}^\times_{>0}$ биективно соответствуют точкам единичной сферы $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, состоящей из векторов эрмитовой длины 1. Эта сфера расслоена на непересекающиеся орбиты группы $\mathrm{U}_1 \simeq S^1$. Множество этих орбит[1] — это комплексная проективная прямая $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, т. е. риманова сфера[2] S^2. Получающееся таким образом расслоение

$$\pi : S^3 = \mathbb{C}^2/\mathbb{R}^\times_{>0} \twoheadrightarrow S^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times$$

со слоями $\mathrm{U}_1 = S^1$ называется *расслоением Хопфа*. Задаваемое формулой (17-19) отображение

$$\mathbb{C}^2 \smallsetminus 0 \twoheadrightarrow S^2 = \{q \in \mathbb{I} \mid \|q\| = 1\}\,, \quad z \mapsto \boldsymbol{n}(z)\,,$$

тоже постоянно вдоль U_1-орбит: матрица $\boldsymbol{n}(z)$ не меняется при умножении z на комплексные числа единичной длины. Поэтому ограничение этого отображения на трёхмерную сферу векторов $z \in \mathbb{C}^2$ эрмитовой длины 1 задаёт расслоение Хопфа явной алгебраической формулой:

$$\pi : (z_0, z_1) \mapsto i\begin{pmatrix} |z_0|^2 - |z_1|^2 & 2z_0\overline{z}_1 \\ 2\overline{z}_0 z_1 & |z_1|^2 - |z_0|^2 \end{pmatrix} \in S^2 \subset \mathbb{I} \subset \mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})\,,$$

показывающей, среди прочего, что расслоение Хопфа гладкое.

[1] Каждая такая орбита представляет собою множество векторов единичной длины в одномерном комплексном подпространстве, отвечающем данной точке в $\mathbb{P}_1$, ср. с n° 16.1.9.

[2] См. пример 16.1 на стр. 204 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf.

Упр. 17.1. Ненулевые элементы матриц Грама исчерпываются произведениями

$$\langle E_{ij}\,,\,E_{ji}\,\rangle = (E_{ij},E_{ij}) = 1/2\,,\quad \text{где}\quad 1\leqslant i,j\leqslant 2\,,$$
$$\widetilde{\det}(E_{11},E_{22}) = \widetilde{\det}(E_{22},E_{11}) = 1\quad \text{и}\quad \widetilde{\det}(E_{12},E_{21}) = \widetilde{\det}(E_{21},E_{12}) = -1\,.$$

Упр. 17.2. Для невырожденной матрицы C выполняется равенство $C^\vee = \det(C)\,C^{-1}$. Поэтому для таких матриц $(AB)^\vee = \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)\,B^{-1}A^{-1} = B^\vee A^\vee$. Так как пары невырожденных матриц всюду плотны в пространстве всех пар матриц, четыре квадратичных соотношения с целыми коэффициентами на матричные элементы, закодированные в матричном равенстве $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$, тождественно выполняются для всех матриц.

Упр. 17.7. Это сразу следует из форм. (17-7) на стр. 273.

Упр. 17.8. Если $q^2 = 1$, то $\|q\|^2 = 1$ и $q^* = q^{-1} = q$, откуда $q\in\mathbb{R}$.

Упр. 17.11. Так как $\boldsymbol{l}$ пропорционален $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\in\Pi_q\cap 1^\perp$ и $\|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\| = \sqrt{3}$, мы заключаем, что $q = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{l}$.

Упр. 17.12. Изоморфизм $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)\xrightarrow{\sim} T$ является композицией изоморфизма $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)\simeq A_4$, задаваемого тавтологическим действием группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ на четырёх точках проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_3) = \{(1:0),(0:1),(1:1),(1:-1)\}$, и изоморфизма $A_4\xrightarrow{\sim} T$, сопоставляющего чётной перестановке вершин тетраэдра осуществляющее её вращение. В упр. 10.35 на стр. 186 мы видели, что при факторизации по $\pm E$ коммутант $\mathrm{SL}_2'(\mathbb{F}_3)\simeq Q_8 = \{\pm E,\ \pm I,\ \pm J,\ \pm K\}$, где

$$I = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\,,\quad J = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\,,\quad K = \begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\,,$$

переходит в группу Клейна $V_4\subset\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$, осуществляющую независимые транспозиции двух пар точек на $\mathbb{P}_1$. Матрицы

$$\pm\frac{1}{2}(E+I+J+K) = \mp(E+I+J+K) = \mp\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} : (0:1)\mapsto(1:1)\mapsto(1:-1)$$
$$\pm\frac{1}{2}(E+I+J-K) = \mp(E+I+J-K) = \pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix} : (1:0)\mapsto(0:1)\mapsto(1:1)$$
$$\pm\frac{1}{2}(E+I-J+K) = \mp(E+I-J+K) = \pm\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix} : (1:0)\mapsto(1:-1)\mapsto(0:1)$$
$$\pm\frac{1}{2}(E-I+J+K) = \mp(E-I+J+K) = \mp\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} : (1:0)\mapsto(1:1)\mapsto(1:-1)$$

переходят в четыре 3-цикла, оставляющие на месте четыре разные точки на $\mathbb{P}_1$:

$$(1:0)\,,\quad (1:-1)\,,\quad (1:1)\,,\quad (0:1)$$

соответственно. Четыре обратные к ним матрицы перейдут в четыре обратных 3-цикла.

Упр. 17.13. Обозначим сторону икосаэдра через a. Гипотенуза прямоугольного треугольника в левом верхнем углу квадрата на рис. 17◇3 на стр. 279 равна высоте правильного треугольника со стороной a, а его катеты равны $1 - a/2$ и 1, откуда $a^2 + 2a - 4 = 0$ и $a = \sqrt{5} - 1$. Точка $N = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}a/2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\vartheta^{-1}$ удалена от центра куба на расстояние $\sqrt{1 + a^2/4} = \sqrt{1 + \vartheta^{-2}} = \vartheta/\sqrt{1 + \vartheta^2}$.

Упр. 17.15. При $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{m}$ операторы $I'_{\boldsymbol{m}}$, $I'_{\boldsymbol{n}}$ по разному действуют на 1, как и операторы $I'_{\boldsymbol{m}}$, $I''_{\boldsymbol{n}}$, а также операторы $I'_{\boldsymbol{m}}$, $I''_{\boldsymbol{n}}$ с $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n}$. Операторы $I'_{\boldsymbol{n}}$, $I''_{\boldsymbol{n}}$ по разному действуют на ортогональные $\boldsymbol{n}$ чисто мнимые кватернионы длины 1