Кватернионы

A12½◇1 (бинарная группа икосаэдра). Покажите, что **а)** объединение бинарной группы тетраэдра и 96 кватернионов, которые получаются из $(\pm\boldsymbol{e}\pm\alpha\boldsymbol{i}\pm\alpha^{-1}\boldsymbol{j})/2$, где $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$, всевозможными чётными перестановками букв $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, составляют мультипликативную подгруппу $\mathfrak{J}\subset\mathbb{H}$ **б)** гомоморфизм $\mathrm{Ad}:\ \mathrm{SU}_2\twoheadrightarrow\mathrm{SO}_3$, $h\mapsto\mathrm{Ad}_h$, переводит $\mathfrak{J}$ в собственную группу I икосаэдра (явно укажите вершины этого икосаэдра) **в)** стабилизатор точки $\boldsymbol{e}\in\mathbb{H}$ в группе $W_{\mathfrak{J}}\subset\mathrm{SO}(\mathbb{H})$, порождённой отражениями $\sigma_q:\ \mathbb{H}\to\mathbb{H}$, $h\mapsto -qh^*q$, с $q\in\mathfrak{J}$, порождается отражениями в ортогоналах к 30 чисто мнимым кватернионам из $\mathfrak{J}$ и изоморфен несобственной группе икосаэдра **г)** кватернионы из группы $\mathfrak{J}$ являются вершинами правильного многогранника с символом Шлефли $(3,3,5)$: опишите звезду вершины $\boldsymbol{e}$ и примыкающие к $\boldsymbol{e}$ грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок несобственной группы многогранника и убедитесь, что она транзитивно действует на флагах.

A12½◇2. Для каждого $z\in\mathbb{F}_{25}$ положим $\overline{z}\overset{\text{def}}{=}F_5(z)=z^5$. Сколько элементов в группе

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{F}_{25})\overset{\text{def}}{=}\{X\in\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_{25})\mid \overline{X}X^t=E\}\,?$$

Не встречалась ли она Вам раньше?

A12½◇3 (бинарная группа октаэдра). Покажите, что **а)** объединение бинарной группы тетраэдра и ещё 24 кватернионов вида $(\pm\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{n})/\sqrt{2}$, где $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ — различные базисные элементы, составляют мультипликативную подгруппу $\mathfrak{O}\subset\mathbb{H}$ **б)** гомоморфизм $\mathrm{Ad}:\ \mathrm{SU}_2\twoheadrightarrow\mathrm{SO}_3$, $h\mapsto\mathrm{Ad}_h$, переводит $\mathfrak{O}$ в собственную группу O октаэдра (явно укажите вершины этого октаэдра и двойственного ему куба) **в)** стабилизатор точки $\boldsymbol{e}\in\mathbb{H}$ в группе $W_{\mathfrak{O}}\subset\mathrm{SO}(\mathbb{H})$, порождённой отражениями $\sigma_q:\ \mathbb{H}\to\mathbb{H}$, $h\mapsto -qh^*q$, с $q\in\mathfrak{O}$, порождается отражениями в ортогоналах к чисто мнимым кватернионам из $\mathfrak{O}$ (сколько их? какую фигуру они образуют?) **г)** кватернионы из группы $\mathfrak{O}$ являются вершинами правильного многогранника с символом Шлефли $(3,3,4)$: опишите звезду вершины $\boldsymbol{e}$ и примыкающие к $\boldsymbol{e}$ грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок несобственной группы многогранника и убедитесь, что она транзитивно действует на флагах.

A12½◇4. Для каждого $z\in\mathbb{F}_4$ положим $\overline{z}\overset{\text{def}}{=}F_2(z)=z^2$. Сколько элементов в группе

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{F}_4)\overset{\text{def}}{=}\{X\in\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_4)\mid \overline{X}X^t=E\}$$

и как она устроена[1]?

A12½◇5. Докажите, что все ненулевые элементы конечномерной ассоциативной $\Bbbk$-алгебры с единицей обратимы если и только если в этой алгебре нет делителей нуля.

A12½◇6 (обобщённые кватернионы). Обозначим через $H_{\Bbbk}(\alpha,\beta)$ ассоциативную $\Bbbk$-алгебру с единицей, порождённую (как $\Bbbk$-алгебра) элементами i, j с соотношениями $ij=-ji$, $i^2=\alpha$, $j^2=\beta$, где $\alpha,\beta\in\Bbbk^{\times}$. Например, $H_{\mathbb{R}}(-1,-1)=\mathbb{H}$. Покажите, что

а) $H_{\Bbbk}(\alpha,1)\simeq\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ для всех $\alpha\in\Bbbk^{\times}$ **б)** $H_{\Bbbk}(\delta^2\alpha,\gamma^2\beta)\simeq H_{\Bbbk}(\alpha,\beta)$ для всех $\gamma,\delta\in\Bbbk^{\times}$

в) обратимость всех ненулевых элементов $H_{\Bbbk}(\alpha,\beta)$ равносильна анизотропности квадратичной формы $x_0^2-\alpha x_1^2-\beta x_2^2+\alpha\beta x_3^2$.

A12½◇7 (октавы). Зададим на 8-мерном вещественном пространстве $\mathbb{O}\overset{\text{def}}{=}\mathbb{H}\oplus\boldsymbol{l}\mathbb{H}$ умножение, сопряжение и норму формулами $(p_1+\boldsymbol{l}q_1)(p_2+\boldsymbol{l}q_2)\overset{\text{def}}{=}(p_1q_1-q_2q_1^*)+\boldsymbol{l}(p_2q_1+p_1^*q_2)$, $(p+\boldsymbol{l}q)^*\overset{\text{def}}{=}p^*-\boldsymbol{l}q$, $\|w\|\overset{\text{def}}{=}ww^*$. Для любого ненулевого $a\in\mathbb{O}$ докажите, что $\|a\|\in\mathbb{R}_{>0}$ и каждое из уравнений $ax=b$ и $xa=b$ имеет единственное решение[2] при всех $b\in\mathbb{O}$.

---

[1] Каковы её факторы Жордана – Гёльдера, разложима ли она в (полу)прямое произведение?

[2] Будьте внимательны: алгебра $\mathbb{O}$ не ассоциативна.

Персональный табель ____ . **Листок № 12$\frac{1}{2}$ (необязательный)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
в			
7			