

ПРОГРАММА ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

КУРСА «АЛГЕБРА – I»

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные курсивом могут стать необязательными или упраздниться вовсе

ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ (7 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Определение поля, коммутативного кольца и абелевой группы. Примеры: числа, многочлены, геометрические векторы, \mathbb{F}_2 , аддитивная и мультипликативная группы поля. Рабочий пример: кольцо \mathbb{Z} — делимость, НОД и НОК, алгоритм Евклида – Гаусса, взаимная простота, свойства взаимно простых элементов, факториальность.

НЕДЕЛЯ 2. Второй рабочий пример: кольца и поля $\mathbb{Z}/(n)$ — таблицы умножения, делители нуля, нильпотенты, обратимые элементы, теоремы Ферма и Эйлера, свойства простых полей $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

НЕДЕЛЯ 3. Гомоморфизмы абелевых групп и коммутативных колец, непустой слой является сдвигом ядра. Приложения: квадраты в поле \mathbb{F}_p , простое подполе и гомоморфизм Фробениуса. Прямые произведения абелевых групп и коммутативных колец. Китайская теорема об остатках (КТО), явное отыскание чисел с заданными остатками.

НЕДЕЛЯ 4. Многочлены — деление «столбиком», НОД, НОК, алгоритм Евклида – Гаусса, взаимная простота, КТО, неприводимые многочлены, факториальность кольца $\mathbb{K}[x]$. Корни и общие корни, *интерполяционный многочлен Лагранжа*. Кольца и поля вычетов $\mathbb{K}[x]/(f)$, отыскание обратных элементов. Рабочий пример: поле \mathbb{C} . *Квадратичный закон взаимности*.

КОНТРОЛЬНАЯ № 1: НОД, НОК и КТО в \mathbb{Z} и $\mathbb{K}[x]$, примитивные расширения полей, поле \mathbb{C} .

НЕДЕЛЯ 5. Конечные поля. *Конечная мультипликативная подгруппа в поле циклическая. Классификация конечных полей.*

НЕДЕЛЯ 6. Формальные степенные ряды и алгебраические операции над ними, обращение ряда с ненулевым свободным членом. Дифференциальное исчисление, приложение: кратные корни многочленов. Экспонента и логарифм, бином с произвольным показателем. *Продвинутые примеры: числа Каталана, действие $\mathbb{Q}[[d/dt]]$ на $\mathbb{Q}[t]$ и суммирование степеней.*

НЕДЕЛЯ 7. Кольца частных, поле частных целостного кольца. Примеры: \mathbb{Q} , поле рациональных функций $\mathbb{K}(t)$, поле рядов Лорана $\mathbb{K}((t))$, разложение рациональных функций в сумму простейших дробей и в степенной ряд. Приложения: отыскание производных и первообразных, решение линейных рекуррентных уравнений. *Дробно степенные ряды, лемма Гензеля, разложение алгебраической функции в ряд Пуизо.*

КОНТРОЛЬНАЯ № 2: рациональные функции и степенные ряды (в сессию после 1-го модуля).

ВТОРАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Идеалы и фактор кольца. *Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе идеала*. Простые и максимальные идеалы. Простые и неприводимые элементы кольца. Области главных идеалов, рабочий пример: евклидовы кольца. Факториальные кольца, факториальность области главных идеалов.

НЕДЕЛЯ 2. Лемма Гаусса и факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами, критерии неприводимости.

НЕДЕЛЯ 3. Алгебра матриц, таблица умножения матричных единиц. Нильпотентные и обратимые матрицы, обращение верхней унитреугольной матрицы. Как преобразуются строки/столбцы матрицы при умножении слева/справа на заданную матрицу. Обратимые матрицы 2×2 и элементарные преобразования строк/столбцов, задаваемые левым/правым умножением на обратимые 2×2 -матрицы.

НЕДЕЛЯ 4. Метод Гаусса над кольцом главных идеалов: приведение матрицы к нормальной форме Смита и его применения для решения систем линейных (диофантовых) уравнений и отыскания обратной матрицы.

КОНТРОЛЬНАЯ № 3: разложение на множители и решение (систем) линейных диофантовых уравнений.

НЕДЕЛЯ 5. Определение группы. Группы преобразований. Циклические подгруппы и порядки элементов. Рабочий пример: симметрическая группа S_n — цикловой тип, длина и знак перестановки, централизатор перестановки данного циклового типа. Гомоморфизмы групп, непустые слои гомоморфизма являются смежными классами ядра.

НЕДЕЛЯ 6. Действие группы на множестве: транспортёры, стабилизаторы, сопряжение, формулы для длины орбиты и числа орбит. Группы фигур, нормализаторы и централизаторы. *Линейные, аффинные и проективные группы над конечными полями.* Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов между небольшими группами.

НЕДЕЛЯ 7. Действие группы на себе: классы смежности и сопряжённости, центр, реализация абстрактной группы группой преобразований. Нормальные подгруппы и фактор группы. Коммутант. Простота знакопеременных групп A_n с $n \geq 5$, другие примеры простых групп. Прямые и полупрямые произведения групп, примеры.

НЕДЕЛЯ 8. p -группы и теоремы Силова. Примеры: строение небольших групп.

КОНТРОЛЬНАЯ № 4: конечные группы.

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ЗА 1-Й СЕМЕСТР.