

**ПРОГРАММА ВТОРОГО СЕМЕСТРА  
ГОДОВОГО КУРСА «АЛГЕБРА – I»**

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю  
темы, набранные курсивом могут стать необязательными или упраздниться вовсе

**ТРЕТЬЯ ЧЕТВЕРТЬ (11 НЕДЕЛЬ)**

НЕДЕЛЯ 1. Повторение: строение конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов и абелевых групп, грассманы многочлены, определители и миноры.

НЕДЕЛЯ 2. Классификация конечномерных пространств с оператором над произвольным полем. Отыскание элементарных делителей и минимального многочлена. Нильпотентные, полупростые, циклические и диагонализуемые операторы.

НЕДЕЛЯ 3. Свойства коммутирующих операторов. Вычисление функций от операторов. Жорданова нормальная форма (над алгебраически замкнутым полем) и нормальная форма Фробениуса.

КОНТРОЛЬНАЯ № 1: определители и линейные операторы.

НЕДЕЛЯ 4. Определение группы. Группы преобразований. Циклические подгруппы и порядки элементов. Рабочий пример: симметрическая группа  $S_n$  — цикловой тип, длина и знак перестановки, сопряжение, централизатор перестановки данного циклового типа. Гомоморфизмы групп, непустые слои гомоморфизма являются смежными классами ядра.

НЕДЕЛЯ 5. Действие группы на множестве: транспортёры, стабилизаторы, сопряжение, формулы для длины орбиты и числа орбит. Группы фигур, нормализаторы и централизаторы. *Линейные, аффинные и проективные группы над конечными полями.* Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов между небольшими группами.

НЕДЕЛЯ 6. Действие группы на себе: классы смежности и сопряжённости, центр, реализация абстрактной группы группой преобразований. Нормальные подгруппы и фактор группы. Коммутаторы и коммутант.

НЕДЕЛЯ 7. Простые группы, простота знакопеременных групп  $A_n$  с  $n \geq 5$ , другие примеры простых групп. *Композиционные ряды. Теорема Жордана–Гёльдера.*

НЕДЕЛЯ 8. Прямые и полупрямые произведения групп, примеры.  $p$ -группы и теоремы Силова, примеры: строение больших групп.

НЕДЕЛЯ 9. Свободные группы. Задание групп образующими и соотношениями. Образующие и соотношения диэдральных групп, групп платоновых тел и симметрической группы.

КОНТРОЛЬНАЯ № 2: конечные группы.

НЕДЕЛЯ 10. Полилинейные отображения модулей. Тензорное произведение модулей над кольцом. Линейные операторы и полилинейные формы на векторных пространствах как тензоры. Базис тензорного произведения свободных модулей. Примеры: тензорные произведения абелевых групп и векторных пространств.

НЕДЕЛЯ 11. Оставлена про запас.

В СЕССИЮ ПОСЛЕ 3-ГО МОДУЛЯ. **Большой устный коллоквиум по материалам первых трёх четвертей:** группы, коммутативные кольца и поля, модули, тензорное произведение модулей, грассманы многочлены определители и миноры, модули над кольцами главных идеалов, классификация конечно порождённых абелевых групп и конечномерных векторных пространств с оператором.

## ЧЕТВЁРТАЯ ЧЕТВЕРТЬ (11 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Повторение: тензорное произведение модулей. Канонические изоморфизмы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Тензорное произведение линейных отображений. *Образующие и соотношения тензорного произведения модулей, заданных образующими и соотношениями.*

НЕДЕЛЯ 2. Тензорная алгебра векторного пространства. Свёртки. *Линейный носитель тензора и многообразия Сегре.*

НЕДЕЛЯ 3. Симметрическая алгебра векторного пространства. Поляризация многочленов и частные производные. *Касательные и поляры проективных гиперповерхностей. Многочлены с одномерным линейным носителем и многообразия Веронезе.*

НЕДЕЛЯ 4. Внешняя алгебра векторного пространства. Поляризация грассмановых многочленов и грассмановы частные производные. *Грассмановы многочлены с минимальным линейным носителем, соотношения Плюккера и грассманианы.*

КОНТРОЛЬНАЯ № 3: тензорная, симметрическая и внешняя алгебры векторного пространства (перед майскими праздниками).

НЕДЕЛЯ 5. Эрмитова геометрия: длина вектора, эрмитова структура однозначно восстанавливается по функции длины, неравенства КБШ и треугольника, матрицы Грама и ортогонализация Грама – Шмидта, эрмитов угол между комплексными прямыми. Унитарная группа.

НЕДЕЛЯ 6. Эрмитово сопряжение линейных отображений. Ортогональная диагонализация нормальных операторов. Нормальные формы унитарных и (анти) самосопряжённых операторов. *SVD разложение оператора между эрмитовыми пространствами.* Полярное разложение обратимого оператора.

НЕДЕЛЯ 7. Комплексификация и овеществление пространств и операторов. Сравнение вещественной и комплексной линейности, соотношения Коши – Римана. Геометрический смысл комплексных собственных векторов. Эрмитово продолжение евклидовой структуры, канонический вид евклидово (анти) самосопряжённых и ортогональных операторов.

НЕДЕЛЯ 8. Комплексные и вещественные структуры. Кэлеровы тройки, *описание кэлеровых троек, продолжающих заданную симплектическую или заданную евклидову структуру до эрмитовой.* Зигелево полупространство и соотношения Римана.

НЕДЕЛЯ 9. Тело  $\mathbb{H}$ , норма, сопряжение, чисто мнимые кватернионы. Действие сопряжением, универсальное накрытие  $S^3 \simeq \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ . Два семейства эрмитовых структур на  $\mathbb{H}$ , спиноры. Расслоение Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ . Приложение кватернионов в геометрии четырёхмерных правильных многогранников.

КОНТРОЛЬНАЯ № 4: эрмитовы пространства и кватернионы.

НЕДЕЛИ 10–11. Оставлены про запас.

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ЗА 2-Й СЕМЕСТР.