

### Модули и матрицы

- АС5♦1.** Модуль с одной образующей называется *циклическим*. Докажите, что  
 а) всякий циклический  $\mathbb{Z}$ -модуль изоморфен либо  $\mathbb{Z}$ , либо  $\mathbb{Z}/(n)$   
 б)  $\mathbb{Z}$ -модуль  $\mathbb{Z}/(n) \oplus \mathbb{Z}/(m)$  циклический если и только если  $\text{НОД}(m, n) = 1$ .
- АС5♦2.** Являются ли циклическими  $\mathbb{Z}$ -модули а)  $\mathbb{Z}^2$  б)  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n)$ ?
- АС5♦3.** Опишите фактор  $\mathbb{Z}$ -модуля  $A = \mathbb{Z}/(9) \oplus \mathbb{Z}/(27)$  по  $\mathbb{Z}$ -подмодулю, порождённому элементами: а)  $([3]_9, [9]_{27})$  б)  $([3]_9, [6]_{27})$  в)  $([6]_9, [3]_{27})$ .
- АС5♦4.** Опишите  $\mathbb{Z}$ -модули а)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(18))$  б)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(18), \mathbb{Z}/(12))$   
 в)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(4), \mathbb{Z}/(16))$  г)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}/(8))$  д)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(16), \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(8))$ .
- АС5♦5.**  $\mathbb{Z}$ -подмодуль  $L \subset \mathbb{Z}^3$  порождается векторами: а)  $(1, 2, 0)$  и  $(2, 1, 0)$  б)  $(1, 2, 0)$  и  $(3, 5, 0)$ .  
 Существует ли такой  $\mathbb{Z}$ -подмодуль  $M \subset \mathbb{Z}^3$ , что  $\mathbb{Z}^3 = L \oplus M$ ?
- АС5♦6.** Модуль  $M$  называется *полупростым*, если для любого подмодуля  $N \subset M$  существует такой подмодуль  $L \subset M$ , что  $M = L \oplus N$ . Полупросты ли  $\mathbb{Z}$ -модули:  
 а)  $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$  б)  $\mathbb{Z}/(p) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(p)$ , где  $p$  — простое в)  $\mathbb{Z}/(p^k)$ , где  $p$  — простое и  $k > 1$ ?
- АС5♦7°.** Пусть матрица  $A$  имеет столбцы (слева направо)  $c_1, c_2, c_3$  и строки (сверху вниз)  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу  $A$ , чтобы получилась матрица а) со строками (сверху вниз)  $r_3 + 2r_4, 3r_1 + r_2, r_2 + r_3$  б) со столбцами (слева направо)  $c_1 + 2c_2, 2c_2 + 3c_3, 3c_3 + 4c_1, 5c_1 + 6c_2, c_1 + c_2 + c_3$ ?
- АС5♦8.** Пусть  $K$  — коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через  $E_{ij} \in \text{Mat}_n(K)$  матрицу с единицей в клетке  $(i, j)$  и нулями в остальных клетках. Составьте таблицу:  
 а) произведений  $E_{ij}E_{k\ell}$  б) коммутаторов  $[E_{ij}, E_{k\ell}] \stackrel{\text{def}}{=} E_{ij}E_{k\ell} - E_{k\ell}E_{ij}$  и  
 в) опишите центр<sup>1</sup> алгебры  $\text{Mat}_n(K)$ .
- АС5♦9.** Укажите в  $\text{Mat}_3(\mathbb{Q})$  какую-нибудь матрицу  $X$  с  $X^3 = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 32 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ .
- АС5♦10.** Найдите: а)  $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2022}$  б)  $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ .
- АС5♦11 (унипотентные матрицы).** Матрица  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ , где  $\mathbb{k}$  — поле, называется *унипотентной*, если  $A = E + N$ , где  $N$  нильпотентна. Покажите, что в зависимости от  $\text{char } \mathbb{k}$  унипотентность матрицы  $A$  равносильна тому, что а)  $A^n = E$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , если  $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$  б)  $A = e^B$  для некоторой нильпотентной матрицы  $B$ , если  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ .
- АС5♦12.** Покажите, что однородные симметрические<sup>2</sup> многочлены  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  степени  $n$  образуют свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль и найдите его ранг для всех  $2 \leq m, n \leq 5$ .
- АС5♦13.** Выясните, являются ли многочлены а)  $\sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$  б)  $\sum_{j < k} \sum_{i \notin \{j, k\}} x_i (x_j - x_k)^2$   
 в)  $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$   
 г)  $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)$   
 симметрическими, и если да, выразите их через  $e_k = \prod_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ .
- АС5♦14.** Выразите дискриминант<sup>3</sup> кубического трёхчлена  $x^3 + px + q$  через  $p$  и  $q$ .
- АС5♦15.** Найдите все комплексные решения системы уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24.$$

<sup>1</sup>Центром алгебры  $A$  называется подалгебра  $Z(A) = \{a \in A \mid \forall b \in A \ ab = ba\}$ .

<sup>2</sup>Многочлен  $f \in K[x_1, \dots, x_m]$  называется *симметрическим*, если  $f(x_1, \dots, x_m) = f(x_{g(1)}, \dots, x_{g(m)})$  для любой биекции  $g: \{1, \dots, m\} \xrightarrow{\cong} \{1, \dots, m\}$ .

<sup>3</sup>Дискриминантом приведённого многочлена  $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$  называется произведение  $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ .