

Метод Гаусса

АС6♦1. Найдите нормальную форму Смита D_A и такие обратимые над \mathbb{Z} квадратные матрицы L_A и R_A , что $D_A = L_A A R_A$ для следующих целочисленных матриц A :

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{pmatrix} 24 & -9 & 0 & -3 \\ -33 & 9 & 6 & 6 \\ -10 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{б)} & \begin{pmatrix} -42 & 42 & 28 & -56 \\ -98 & 56 & 28 & -42 \\ 91 & -70 & -42 & 77 \end{pmatrix} \quad \text{в)} & \begin{pmatrix} -48 & 39 & -42 & 51 \\ -15 & -6 & -6 & 27 \\ -6 & 15 & -9 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{г)} & \begin{pmatrix} -34 & -15 & 24 & 36 \\ 12 & 12 & -19 & -23 \\ -14 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{д)} & \begin{pmatrix} 50 & -34 & 20 & 8 \\ -30 & 35 & -15 & -13 \\ -36 & 32 & -16 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{е)} & \begin{pmatrix} -56 & 62 & -7 & -23 \\ -28 & 14 & 5 & -3 \\ 7 & 22 & -14 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

АС6♦2. Найдите все целые решения систем уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{cases} 35x_1 + 63x_2 - 77x_3 = -231 \\ -35x_1 - 28x_2 + 42x_3 = 126 \end{cases} \quad \text{б)} & \begin{cases} -371x_1 + 105x_2 - 252x_3 = -357 \\ 133x_1 - 35x_2 + 91x_3 = 126 \end{cases} \\ \text{в)} & \begin{cases} 56x_1 + 28x_2 + 7x_3 = 83 \\ 196x_1 + 28x_2 - 63x_3 = 10 \\ -133x_1 - 14x_2 + 49x_3 = 14 \end{cases} \quad \text{г)} & \begin{cases} -455x_1 - 189x_2 + 336x_3 = 133 \\ 196x_1 + 84x_2 - 147x_3 = -56 \\ 189x_1 + 63x_2 - 126x_3 = -63 \end{cases} \\ \text{д)} & \begin{cases} -196x_1 + 294x_2 + 427x_3 = -378 \\ 399x_1 - 588x_2 - 840x_3 = 651 \\ 56x_1 - 84x_2 - 119x_3 = 84 \end{cases} \quad \text{е)} & \begin{cases} 26x_1 - 494x_2 - 169x_3 + 26x_4 = 390 \\ -312x_1 - 390x_2 - 78x_3 + 39x_4 = -117 \\ 234x_1 + 468x_2 + 117x_3 - 39x_4 = -39 \end{cases} \end{aligned}$$

АС6♦3. Выясните, обратимы ли над \mathbb{Z} матрицы, и если да, найдите обратные:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{pmatrix} 341 & -10 \\ 989 & -29 \end{pmatrix} \quad \text{б)} & \begin{pmatrix} 240 & 81 \\ 196 & 66 \end{pmatrix} \quad \text{в)} & \begin{pmatrix} 1073 & -236 \\ 341 & -75 \end{pmatrix} \quad \text{г)} & \begin{pmatrix} -19 & 5 & -5 \\ 14 & 13 & 10 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{д)} & \begin{pmatrix} 31 & -17 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 21 & -10 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{е)} & \begin{pmatrix} 81 & 20 & -11 & 6 \\ 52 & 13 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ж)} & \begin{pmatrix} -6 & -72 & -6 & 29 \\ 41 & 56 & 16 & -17 \\ -18 & -43 & -8 & 15 \\ -6 & -19 & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{з)} & \begin{pmatrix} 4 & -43 & -17 \\ 1 & -10 & -4 \\ 1 & -8 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{и)} & \begin{pmatrix} -47 & 17 & -6 \\ -12 & 4 & -1 \\ 27 & -10 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

АС6♦4. Найдите взаимные базисы в \mathbb{Z}^3 и его подмодуле, порождённом столбцами матриц

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{pmatrix} -70 & 59 \\ 8 & -6 \\ -25 & 22 \end{pmatrix} \quad \text{б)} & \begin{pmatrix} 91 & 49 \\ -21 & -21 \\ 28 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{в)} & \begin{pmatrix} -46 & -16 & 15 \\ -30 & -14 & 5 \\ -20 & -2 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{г)} & \begin{pmatrix} 78 & -13 & 65 \\ -78 & -13 & -39 \\ 78 & 0 & 52 \end{pmatrix} \\ \text{д)} & \begin{pmatrix} 28 & -35 & 100 & -33 \\ -15 & -2 & -10 & 5 \\ 10 & 23 & -39 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{е)} & \begin{pmatrix} 68 & -20 & 40 & -1 \\ -17 & 10 & -20 & 9 \\ -51 & 22 & -44 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{ж)} & \begin{pmatrix} 76 & -95 & 57 & 19 & -19 \\ 26 & -6 & -10 & -4 & 12 \\ 37 & -86 & 72 & 25 & -37 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

АС6♦5 (теорема о ранге). Докажите, что столбцы и строки любой матрицы $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ над областью главных идеалов K порождают в K^m и в K^n свободные подмодули одинакового ранга, равного числу ненулевых элементов нормальной формы Смита матрицы A .

АС6♦6. Напишите разложение в прямую сумму неразложимых циклических абелевых групп фактора решётки \mathbb{Z}^4 по подрешётке, порождённой столбцами матрицы

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{pmatrix} -2 & 87 & -86 \\ 41 & -51 & 69 \\ 32 & -69 & 81 \\ 24 & -71 & 80 \end{pmatrix} \quad \text{б)} & \begin{pmatrix} 29 & 22 & -17 \\ 50 & 7 & -19 \\ -83 & -28 & 37 \\ -53 & -16 & 23 \end{pmatrix} \quad \text{в)} & \begin{pmatrix} -45 & -72 & 19 & 14 \\ 1 & 16 & 15 & 4 \\ 9 & 18 & 3 & 0 \\ 8 & 26 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{г)} & \begin{pmatrix} 76 & 60 & -34 & -2 \\ 100 & 78 & -42 & -6 \\ -28 & -24 & 10 & 2 \\ 86 & 66 & -36 & -6 \end{pmatrix} \\ \text{д)} & \begin{pmatrix} -31 & -52 & -47 & 13 & 11 \\ -7 & -4 & -5 & 1 & 1 \\ -62 & 66 & 24 & -6 & -10 \\ -100 & 10 & -28 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{е)} & \begin{pmatrix} 36 & 20 & -12 & -16 & 20 \\ 18 & 10 & -6 & -8 & 10 \\ 24 & 56 & -12 & -16 & 32 \\ -6 & -46 & 6 & 8 & -22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$