

## Определители

АС8♦1. Для произвольных квадратных матриц  $A$  и  $B$  выразите через  $\det A$  и  $\det B$

а)  $\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$  б)  $\det \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & * \end{pmatrix}$ .

АС8♦2. Как меняется определитель при отражении относительно побочной диагонали?

АС8♦3. Сколько  $n \times n$  матриц определителя 1 имеется над полем из  $q$  элементов?

АС8♦4. Сколько элементов в факторе  $\mathbb{Z}^4/L$ , где  $L \subset \mathbb{Z}^4$  порождается столбцами матрицы

а)  $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 & -7 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  б)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 7 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  в)  $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

АС8♦5. Не прибегая к методу Гаусса вычислите

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$  б)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -8 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$  в)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ -3 & 10 & -13 \end{pmatrix}^{-1}$ .

АС8♦6. Вычислите определитель матрицы с 1 на главной диагонали и 2 в остальных местах.

АС8♦7. Как связаны дискриминант приведённого многочлена  $\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$  и  $\det(\alpha_j^{n-i})$ ?

АС8♦8 (циркулянт). Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , через значения полинома  $f(x) = \alpha_0 x^n + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$  на корнях  $\sqrt[n+1]{1} \in \mathbb{C}$ .

АС8♦9. Пусть  $AB = E$ . Докажите для дополнительных миноров равенство  $a_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{I}\overline{J}}$ .

АС8♦10. Вычислите все частные производные  $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \dots \partial a_{i_k j_k}}$ . Если общий случай вызывает затруднения, начните с  $k = 1, 2$ .

АС8♦11. НОД  $2 \times 2$  миноров целочисленной  $3 \times 3$  матрицы равен 12. Может ли её определитель быть равен а) 28 б) 36? Может ли НОД элементов этой матрицы быть равен в) 1 г) 3 д) 5 е) 6 ж) 8? Если да — приведите пример, нет — объясните, почему.

АС8♦12. Не прибегая к методу Гаусса вычислите инвариантные множители матриц

а)  $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 3 \\ -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  б)  $\begin{pmatrix} 17 & -5 & -37 \\ -21 & 0 & 21 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  в)  $\begin{pmatrix} -3 & 24 & -27 & 9 \\ 9 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

АС8♦13\*. Существует ли комплексная  $2 \times 4$  матрица с множеством  $2 \times 2$  миноров

а)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  б)  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ?

Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.