Тензорная алгебра

Обозначения. Всюду в этом листке $e_1,\dots,e_d$ и $x_1,\dots,x_d$ по умолчанию означают двойственные базисы векторных пространств V и V^* над произвольным полем $\Bbbk$. Через $\mathrm{Sym}^n V$, $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ обозначаются подпространства симметричных и знакопеременных тензоров, а через $S^nV = V^{\otimes n}/(\mathcal{J}_{\mathrm{com}} \cap V^{\otimes n})$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{J}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n})$ — обычные и грассмановы однородные многочлены степени n от $e_1,\dots,e_d$ (факторы пространства $V^{\otimes n}$ по соотношениям $\mathcal{J}_{\mathrm{com}}$ и $\mathcal{J}_{\mathrm{sk}}$ коммутирования и антикоммутирования).

AC14◇1. Постройте изоморфизмы пространства n-линейных форм $V\times\ldots\times V \to \Bbbk$ с пространствами **а)** $V^{\otimes n^*}$ **б)** $V^{*\otimes n}$. Который из них остаётся изоморфизмом в бесконечномерии?

AC14◇2. Напишите матрицы Грама билинейных форм **а)** $(x_1+x_2)\otimes(x_1-x_2)$ **б)** $(x_1+x_2)^{\otimes 2}$ **в)** $(x_1+2x_2)\otimes(x_1+x_2)-(x_1+x_2)\otimes(x_1+2x_2)$ **г)** $(x_1+2x_2)\otimes(x_3+x_4)+(x_1-2x_2)\otimes(x_3-x_4)$.

AC14◇3. Пусть $d=\dim V=3$, $\det :\ V\times V\times V \to \Bbbk$ — определитель матрицы координат тройки векторов в базисе e_1,e_2,e_3, а $\varphi = x_1\otimes x_2 + x_3^{\otimes 2}$. Вычислите $\psi(e_1,e_2,e_3,e_3,e_3)$ для
а) $\psi = \varphi\otimes\det$ **б)** $\psi = \det\otimes\varphi$.

AC14◇4. Разложимы ли тензоры **а)** $\sum_i e_i^{\otimes 2}$ **б)** $\sum_i e_i^{\otimes 3}$ **в)** $\sum_{ij} e_i^{\otimes 2}\otimes e_j$ **г)** $\sum_{ij} ij\, e_i\otimes e_j$
д) $\sum_{ij}(i+j)\, e_i\otimes e_j$ **е)** $\sum_{ijk} 2^{i+j+k^2} e_i\otimes e_j\otimes e_k$?

AC14◇5. Для конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** симметричных n-линейных форм $\varphi :\ V\times\ldots\times V\to\Bbbk$ **б)** функций $f:\ V\to\Bbbk$, задаваемых однородными многочленами степени n от $x_1,\dots,x_d$ **в)** $\mathrm{Sym}^n(V^*)$ **г)** $\mathrm{Sym}^n(V)^*$ **д)** $(S^nV)^*$ **е)** $S^n(V^*)$. Куда при этом переходит базис пространства (е) из мономов $x_1^{m_1}\ldots x_d^{m_d}$?

AC14◇6. В условиях зад. AC14◇5 постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** знакопеременных n-линейных форм $\varphi :\ V\times\ldots\times V\to\Bbbk$ **б)** $\mathrm{Alt}^n(V^*)$ **в)** $\mathrm{Alt}^n(V)^*$ **г)** $(\Lambda^nV)^*$ **д)** $\Lambda^n(V^*)$. Куда переходит базис пространства (д) из мономов $x_{i_1}\wedge\ldots\wedge x_{i_m}$?

AC14◇7. Какие из построенных в двух предыдущих задачах изоморфизмов остаются таковыми **а)** над полями конечной характеристики **б)** в бесконечномерии?

AC14◇8. Пусть $\dim V = d$. Найдите $\dim\mathrm{Sym}^n V = \dim S^nV$ и $\dim\mathrm{Alt}^n V = \dim\Lambda^nV$.

AC14◇9. Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$. Докажите, что **а)** $V\otimes V \simeq \mathrm{Sym}^2 V\oplus\mathrm{Alt}^2 V$ **б)** сумма $\mathrm{Sym}^n V\oplus\mathrm{Alt}^n V$ прямая при всех n. Верно ли это, когда $\mathrm{char}\,\Bbbk = 2$?

AC14◇10. Предъявите $t\in V^{\otimes 3}\smallsetminus(\mathrm{Sym}^3 V\oplus\mathrm{Alt}^3 V)$.

AC14◇11 (принцип Аронгольда). Покажите, что над полем характеристики нуль пространства $\mathrm{Sym}^n V^*$ и $S^n(V^*)$ линейно порождаются, соответственно, тензорами $\varphi^{\otimes n} = \varphi\otimes\ldots\otimes\varphi$ и многочленами φ^n, где $\varphi\in V^*$, и явно выразите через $\varphi^{\otimes n}$ тензоры
а) $x_{[2,1]} = x_1\otimes x_1\otimes x_2 + x_1\otimes x_2\otimes x_1 + x_2\otimes x_1\otimes x_1$
б) $x_{[3,1]} = x_1\otimes x_1\otimes x_1\otimes x_2 + x_1\otimes x_1\otimes x_2\otimes x_1 + x_1\otimes x_2\otimes x_1\otimes x_1 + x_2\otimes x_1\otimes x_1\otimes x_1$.

AC14◇12. Вычислите
а) $\mathrm{sym}_{|n|+|k|}(x_{[n_1,\dots,n_d]}\otimes x_{[k_1,\dots,k_d]})$ **б)** $\mathrm{alt}_{n+k}\big(\mathrm{alt}_n(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_n})\otimes\mathrm{alt}_k(e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_k})\big)$.

AC14◇13. Верно ли, что **а)** $S^2S^2V\simeq S^4V$ **б)** $\mathrm{sym}_4(\mathrm{Sym}^2 V\otimes\mathrm{Sym}^2 V) = \mathrm{Sym}^4 V$ **в)** $\Lambda^2\Lambda^2V\simeq\Lambda^4V$ **г)** $\mathrm{alt}_4(\mathrm{Alt}^2 V\otimes\mathrm{Alt}^2 V) = \mathrm{Alt}^4 V$?

AC14◇14. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен $9\,x^3 - 15\,yx^2 - 6\,zx^2 + 9\,xy^2 + 18\,z^2x - 2\,y^3 + 3\,zy^2 - 15\,z^2y + 7\,z^3$ в многочлен от $\leqslant 2$ переменных? Если да, предъявите такую замену явно.

AC14◇15. Выясните, разложима ли в произведение трёх линейных форм от $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4$ грассманова кубическая форма $-\xi_1\wedge\xi_2\wedge\xi_3 + 2\,\xi_1\wedge\xi_2\wedge\xi_4 + 4\,\xi_1\wedge\xi_3\wedge\xi_4 + 3\,\xi_2\wedge\xi_3\wedge\xi_4$, и если да, выпишите такое разложение явно.