Комплексное и вещественное

АС15◇1. Рассмотрим комплексное векторное пространство W и обозначим через $W_{\mathbb{R}}$ его овеществление.

- **а)** Пусть векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис W над $\mathbb{C}$. Дополните его до базиса пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ и найдите $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}}$.
- **б)** Найдите вещественную коразмерность подпространства $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$.

АС15◇2. Обозначим через $\sigma, \tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отражение и поворот, порождающие диэдральную группу D_n, а через $\sigma_{\mathbb{C}}, \tau_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — их комплексификации. Как действует $\sigma_{\mathbb{C}}$ на собственные векторы поворота?

АС15◇3. Как связаны друг с другом **а)** характеристические многочлены **б)** собственные числа **в)** собственные векторы **г)** элементарные делители (или ЖНФ) комплексного линейного оператора и комплексификации его овеществления? Если общий случай вызывает затруднения, начните с оператора умножения на i в одномерном пространстве $\mathbb{C}$.

АС15◇4 (сопряжённые комплексные структуры). Рассмотрим комплексное векторное пространство W и обозначим через $\overline{W}$ пространство, совпадающее с W как аддитивная абелева группа, но с умножением векторов на комплексные числа по формуле $z \circ w \overset{\text{def}}{=} \overline{z} \cdot w$ (слева стоит произведение в $\overline{W}$, а справа — произведение в W). Покажите, что

- **а)** $\overline{W}$ является векторным пространством над $\mathbb{C}$ и $\dim_{\mathbb{C}} \overline{W} = \dim_{\mathbb{C}} W$
- **б)** комплексифицированное овеществление пространства W канонически изоморфно $W \oplus \overline{W}$ как комплексное векторное пространство.

Всюду далее речь идёт про конечномерные эрмитовы пространства.

АС15◇5. Приведите пример линейного оператора в эрмитовом пространстве, имеющего инвариантное подпространство, ортогонал к которому не инвариантен.

АС15◇6. Покажите, что для каждого линейного оператора $F : U \to W$ существует единственный такой оператор $F^* : W \to U$, что $(Fu, w) = (u, F^*w)$ для всех $u\iota U$ и $w \in W$.

- **а)** Выразите матрицу оператора F^* в произвольных базисах пространств U, W через матрицу оператора F и матрицы Грама этих базисов и докажите равенства
- **б)** $(FG)^* = G^*F^*$ **в)** $F^{**} = F$ **г)** $(\ker F)^{\perp} = \operatorname{im} F^*$ **д)** $(\operatorname{im} F)^{\perp} = \ker F^*$
- **е)** $(zF)^* = \overline{z}\, F$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

АС15◇7. Пусть $V = U \oplus W$ (сумма не обязательно ортогональная) и оператор $F : V \to V$ проектирует V на W вдоль U. Покажите, что $V = U^{\perp} \oplus W^{\perp}$ и опишите действие оператора F^*.

АС15◇8. Пусть F — произвольный линейный эндоморфизм эрмитова пространства W. Докажите, что **а)** если F обратим, то $F^{-1^*} = F^{*^{-1}}$

- **б)** если подпространство $U \subset W$ F-инвариантно, то $U^{\perp}$ F^*-инвариантно
- **в)** если вектор $w \in W$ собственный и для F, и для F^*, то собственные числа сопряжены.

АС15◇9. Рассмотрим пространство W бесконечно гладких функций $[0,1] \to \mathbb{C}$, зануляющихся в точках 0, 1 вместе со всеми своими производными.

- **а)** Покажите, что форма $(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$ задаёт на нём эрмитову структуру.
- **б)** Вычислите сопряжённый к оператору $f \mapsto a_0 f + a_1 f'(x) + a_2 f''(x)$, где $a_0, a_1, a_2 \in W$ — заданные функции.
- **в)** Самосопряжён ли оператор $x^2(x-1)^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1)\frac{d}{dx}$?

АС15◇10. Покажите, что для самосопряжённых операторов F, G на эрмитовом пространстве W равенство $(Fw, w) = (Gw, w)$ для всех $w \in W$ равносильно равенству $F = G$.