

Образцы задач, которые могут встретиться¹ на коллоквиуме

Задача 1. Опишите все решения уравнения $nx = 0$ в кольце $\mathbb{Z}/(m)$. Сколько их?

Задача 2. Каков порядок мультипликативной группы корней n -той степени из 1 в конечном поле \mathbb{F}_q ? Сколько элементов в $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$?

Задача 3. При каких q_1, q_2 существует вложение конечных полей $\mathbb{F}_{q_1} \hookrightarrow \mathbb{F}_{q_2}$?

Задача 4. Опишите абелеву группу гомоморфизмов абелевых групп $\text{Hom}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m))$.

Задача 5. Опишите группы обратимых элементов колец а) $\mathbb{Z}/(4)$ б) $\mathbb{Z}/(8)$ в) $\mathbb{Z}/(16)$ г*) $\mathbb{Z}/(2^n)$ д) $\mathbb{Z}/(9)$ е) $\mathbb{Z}/(27)$ ж) $\mathbb{Z}/(25)$ з*) $\mathbb{Z}/(p^n)$, где $p > 2$ — простое.

Задача 6. Найдите число решений уравнения $x^n = 1$ в кольце $\mathbb{Z}/(m)$ при конкретных m, n . Например, сколько решений у уравнения а) $x^{57} = 1$ в $\mathbb{Z}/(360)$ б) $x^{117} = 1$ в $\mathbb{Z}/(228)$?

Задача 7. Верно ли, что ни одно число а) вида $4k + 3$ не является суммой квадратов двух целых чисел б) вида 10^{3k+1} не является суммой кубов двух целых чисел?

Задача 8. Чему равно третье по величине натуральное число с остатками

а) 2 и 7 от деления на 57 и 179 б) 2, 4, 5 от деления на 5, 7, 8?

Задача 9. При каких p среди квадратов поля \mathbb{F}_p имеется а) -1 б) 2 ?

Задача 10. Задачи про кольцо гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$:

а) При каких простых $p \in \mathbb{N}$ имеется ненулевой гомоморфизм колец $\mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/(p)$?

б) Какие простые $p \in \mathbb{Z}$ остаются таковыми в $\mathbb{Z}[i]$?

в) Разложите 7 и $7 + i$ на простые множители в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 11. Найдите остаток от деления $x^{2023} + x^2 + 1$ на $x^2 - x + 1$ в $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 12. Пусть поле \mathbb{k} конечно. Всякая ли функция $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ является многочленом?

Задача 13. Может ли ненулевой многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ над бесконечным полем \mathbb{k} задавать тождественно нулевую функцию $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$?

Задача 14. Выразите $\sin(7x)$ в виде многочлена от $\sin x$.

Задача 15. Вычислите сумму $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$

Задача 16. Вычислите в радикалах а) $\cos(2\pi/5)$ б) $\sin(2\pi/5)$.

Задача 17. Верно ли, что для любого многочлена $f \in \mathbb{k}[x]$ ряд $\sum_{k \geq 0} f(k)x^k \in \mathbb{k}[[x]]$ является разложением некоторой рациональной функции из $\mathbb{k}(x)$?

Задача 18. Найдите k -тый член последовательности a_k , если:

а) $a_0 = 1, a_1 = -7$ и $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ при $k \geq 2$

б) $a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = -29$ и $a_k = 9a_{k-1} - 26a_{k-2} + 24a_{k-3}$ при $k \geq 3$.

Задача 19. Пользуясь разложениями $(1-x)^{\pm 1/2}$ в $\mathbb{Q}[[x]]$, вычислите

$$\binom{2k-2}{k-1} + \frac{1}{2} \binom{2}{1} \binom{2k-4}{k-2} + \frac{1}{3} \binom{4}{2} \binom{2k-6}{k-3} + \dots + \frac{1}{k-1} \binom{2k-4}{k-2} \binom{2}{1} + \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1}.$$

Задача 20. Выясните, приводим ли в $\mathbb{Z}[x]$ многочлен

а) $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$ б) $x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 8x + 34$ в) $x^{105} - 9$

и если да, разложите его на неприводимые множители.

Задача 21. Сколько неприводимых многочленов второй степени в $\mathbb{F}_5[x]$?

Задача 22. У скольких многочленов степени $\leq n$ из кольца $\mathbb{F}_2[x]$ нет корней в \mathbb{F}_2 ?

¹А могут и не встретиться. А могут встретиться, но другие. Может быть, даже и не очень похожие. Наша компания неустанно совершенствует выпускаемые изделия ☺.

- Задача 23.** Разложите многочлен $x^7 + x^3 + 1$ на неприводимые множители в $\mathbb{F}_2[x]$ или докажите, что он неприводим.
- Задача 24.** Укажите непростой неприводимый элемент в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$.
- Задача 25.** Найдите сумму 4-х степеней комплексных корней многочлена $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 3$.
- Задача 26.** Выразите дискриминант¹ кубического трёхчлена $x^3 + px + q$ через p и q .
- Задача 27.** Верно ли, что столбцы и строки любой матрицы $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ над областью главных идеалов K порождают в K^m и в K^n свободные подмодули одинакового ранга?
- Задача 28.** Обозначим через $g(A)$ минимальное число порождающих абелевой группы A . Найдите $\max g(A)$ по всем абелевым группам A порядка 315000, укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.
- Задача 29.** Сколько различных разложений в прямую сумму двух собственных подгрупп имеет абелева группа а) $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(13)$ б) $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(7)$ в) $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(49)$?
- Задача 30.** Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$ подгруппа, изоморфная а) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$ б) $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$ в) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?
- Задача 31.** Являются ли абелевы группы \mathbb{Q} и \mathbb{Q}/\mathbb{Z} конечно порождёнными?
- Задача 32.** Вычислите $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
- Задача 33.** Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что абелева группа $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/(p_1^{m_1}) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p_k^{m_k})$, где все p_i — простые, является циклической.
- Задача 34.** Сколько элементов в абелевой группе с образующими a_1, a_2, a_3, a_4 и соотношениями $-5a_1 + 10a_2 + 10a_3 = -7a_1 + 8a_2 - 2a_3 = 10a_1 - 3a_2 + a_3 - 8a_4 = -9a_2 + 7a_4 = 0$?
- Задача 35.** Как меняется определитель при отражении матрицы относительно побочной диагонали?
- Задача 36.** Вычислите определитель матрицы с 3 на главной диагонали и 2 в остальных местах.
- Задача 37.** Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0 x^n + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ на корнях $\sqrt[n+1]{1} \in \mathbb{C}$.
- Задача 38.** Вычислите все частные производные $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \dots \partial a_{i_k j_k}}$.
- Задача 39.** НОД 2×2 миноров целочисленной 3×3 матрицы равен 12. Может ли её определитель быть равен а) 28 б) 36? Может ли НОД элементов этой матрицы быть равен в) 1 г) 2 д) 3 е) 4 ж) 5 з) 6? Если да — приведите пример, нет — объясните, почему.
- Задача 40.** Существует ли (1) над полем \mathbb{Q} (2) над каким-нибудь полем линейный оператор с характеристическим и минимальным многочленами а) $\chi(t) = (t^6 + 1), \mu(t) = (t^2 + 1)$ б) $\chi(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3, \mu(t) = (t - 1)(t - 2)$ в) $\chi(t) = (t - 1)^5(t - 2)^5, \mu(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$? Если да, то приведите пример.
- Задача 41.** Перечислите, с точностью до подобия, все рациональные матрицы с характеристическим многочленом а) $(x - 2)^3$ б) $(x - 3)^4$ в) $x^4 - 1$ г) $(x^4 - 1)^2$. Какие из них диагонализуемы? Какие полупросты? У каких есть циклический вектор?
- Задача 42.** Над полем \mathbb{Q} найдите жорданову и фробениусову нормальную форму матрицы а) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 15 & -10 & 3 \\ 18 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -16 & -10 & -8 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ -16 & -6 & 4 \\ 28 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.
- Задача 43.** Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

¹Дискриминантом приведённого многочлена $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ называется произведение $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Задача 44. Всякая ли квадратная матрица сопряжена своей транспонированной?

Задача 45. Перечислите классы подобных матриц в $\text{Mat}_2(\mathbb{F}_5)$, $\text{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ и $\text{SL}_2(\mathbb{F}_5)$.

Задача 46. Всюду ли плотны в пространстве (1) $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ (2) $\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$
а) матрицы с циклическим вектором б) диагонализуемые матрицы?

Задача 47. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{2023}$.

Задача 48. Конечная группа транзитивно действует на множестве из не менее двух элементов. Всегда ли в ней есть элемент, действующий без неподвижных точек?

Задача 49. Какие классы сопряжённости из S_n распадаются на несколько классов в A_n ?

Задача 50. Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе $\text{Aut } A_5$.

Задача 51. Перечислите все нормальные подгруппы в группе A_4 .

Задача 52. Каждая ли перестановка из S_n является композицией двух инволюций?

Задача 53. Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?

Задача 54. Приведите пример таких двух не изоморфных групп G_1 , G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \triangleleft G_1$, $H_2 \triangleleft G_2$, что $H_1 \simeq H_2$ и $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.

Задача 55. Изоморфны ли группы а) $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ и S_3 б) $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ и S_4 в) $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ и A_4
г) $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ и $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ д) $\text{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ и $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/(2)$ е) $\text{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ и $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/(2)$
ж) $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ и $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ з) $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ и $\text{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ и) $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ и A_5
к) A_5 и собственная группа икосаэдра л) S_5 и полная группа икосаэдра.

Задача 56. Раскладывается ли группа кватернионных единиц Q_8 в полупрямое произведение двух собственных подгрупп?

Задача 57. Перечислите все силовские подгруппы в S_7 .

Задача 58. Сколько всего силовских p -подгрупп в $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$?

Задача 59. Перечислите (с точностью до изоморфизма) все группы порядка
а) 81 б) 63 в) 56 г) 12 д) 8.

Задача 60. Опишите группы автоморфизмов групп:

а) $\mathbb{Z}/(n)$ б) $\mathbb{Z}/(p) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p)$ в) D_3 г) D_4 д) Q_8 .

У каких из этих групп все автоморфизмы внутренние?