

## Образцы задач, которые могут встретиться<sup>1</sup> на коллоквиуме

**Задача 1.** Опишите все решения уравнения  $nx = 0$  в кольце  $\mathbb{Z}/(m)$ . Сколько их?

**Задача 2.** Каков порядок мультипликативной группы корней  $n$ -той степени из 1 в конечном поле  $\mathbb{F}_q$ ? Сколько элементов в  $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ ?

**Задача 3.** При каких  $q_1, q_2$  существует вложение конечных полей  $\mathbb{F}_{q_1} \hookrightarrow \mathbb{F}_{q_2}$ ?

**Задача 4.** Опишите абелеву группу гомоморфизмов абелевых групп  $\text{Hom}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m))$ .

**Задача 5.** Опишите группы обратимых элементов колец а)  $\mathbb{Z}/(4)$  б)  $\mathbb{Z}/(8)$  в)  $\mathbb{Z}/(16)$  г\*)  $\mathbb{Z}/(2^n)$  д)  $\mathbb{Z}/(9)$  е)  $\mathbb{Z}/(27)$  ж)  $\mathbb{Z}/(25)$  з\*)  $\mathbb{Z}/(p^n)$ , где  $p > 2$  — простое.

**Задача 6.** Найдите число решений уравнения  $x^n = 1$  в кольце  $\mathbb{Z}/(m)$  при конкретных  $m, n$ . Например, сколько решений у уравнения а)  $x^{57} = 1$  в  $\mathbb{Z}/(360)$  б)  $x^{117} = 1$  в  $\mathbb{Z}/(228)$ ?

**Задача 7.** Верно ли, что ни одно число а) вида  $4k + 3$  не является суммой квадратов двух целых чисел б) вида  $10^{3k+1}$  не является суммой кубов двух целых чисел?

**Задача 8.** Чему равно третье по величине натуральное число с остатками

а) 2 и 7 от деления на 57 и 179 б) 2, 4, 5 от деления на 5, 7, 8?

**Задача 9.** При каких  $p$  среди квадратов поля  $\mathbb{F}_p$  имеется а)  $-1$  б)  $2$ ?

**Задача 10.** Задачи про кольцо гауссовых чисел  $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ :

а) При каких простых  $p \in \mathbb{N}$  имеется ненулевой гомоморфизм колец  $\mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/(p)$ ?

б) Какие простые  $p \in \mathbb{Z}$  остаются таковыми в  $\mathbb{Z}[i]$ ?

в) Разложите 7 и  $7 + i$  на простые множители в  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Задача 11.** Найдите остаток от деления  $x^{2023} + x^2 + 1$  на  $x^2 - x + 1$  в  $\mathbb{Q}[x]$ .

**Задача 12.** Пусть поле  $\mathbb{k}$  конечно. Всякая ли функция  $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$  является многочленом?

**Задача 13.** Может ли ненулевой многочлен  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  задавать тождественно нулевую функцию  $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ ?

**Задача 14.** Выразите  $\sin(7x)$  в виде многочлена от  $\sin x$ .

**Задача 15.** Вычислите сумму  $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$

**Задача 16.** Вычислите в радикалах а)  $\cos(2\pi/5)$  б)  $\sin(2\pi/5)$ .

**Задача 17.** Верно ли, что для любого многочлена  $f \in \mathbb{k}[x]$  ряд  $\sum_{k \geq 0} f(k)x^k \in \mathbb{k}[[x]]$  является разложением некоторой рациональной функции из  $\mathbb{k}(x)$ ?

**Задача 18.** Найдите  $k$ -тый член последовательности  $a_k$ , если:

а)  $a_0 = 1, a_1 = -7$  и  $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$  при  $k \geq 2$

б)  $a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = -29$  и  $a_k = 9a_{k-1} - 26a_{k-2} + 24a_{k-3}$  при  $k \geq 3$ .

**Задача 19.** Пользуясь разложениями  $(1-x)^{\pm 1/2}$  в  $\mathbb{Q}[[x]]$ , вычислите

$$\binom{2k-2}{k-1} + \frac{1}{2} \binom{2}{1} \binom{2k-4}{k-2} + \frac{1}{3} \binom{4}{2} \binom{2k-6}{k-3} + \dots + \frac{1}{k-1} \binom{2k-4}{k-2} \binom{2}{1} + \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1}.$$

**Задача 20.** Выясните, приводим ли в  $\mathbb{Z}[x]$  многочлен

а)  $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$  б)  $x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 8x + 34$  в)  $x^{105} - 9$

и если да, разложите его на неприводимые множители.

**Задача 21.** Сколько неприводимых многочленов второй степени в  $\mathbb{F}_5[x]$ ?

**Задача 22.** У скольких многочленов степени  $\leq n$  из кольца  $\mathbb{F}_2[x]$  нет корней в  $\mathbb{F}_2$ ?

<sup>1</sup>А могут и не встретиться. А могут встретиться, но другие. Может быть, даже и не очень похожие. Наша компания неустанно совершенствует выпускаемые изделия ☺.

- Задача 23.** Разложите многочлен  $x^7 + x^3 + 1$  на неприводимые множители в  $\mathbb{F}_2[x]$  или докажите, что он неприводим.
- Задача 24.** Укажите непростой неприводимый элемент в кольце  $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ .
- Задача 25.** Найдите сумму 4-х степеней комплексных корней многочлена  $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 3$ .
- Задача 26.** Выразите дискриминант<sup>1</sup> кубического трёхчлена  $x^3 + px + q$  через  $p$  и  $q$ .
- Задача 27.** Верно ли, что столбцы и строки любой матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  над областью главных идеалов  $K$  порождают в  $K^m$  и в  $K^n$  свободные подмодули одинакового ранга?
- Задача 28.** Обозначим через  $g(A)$  минимальное число порождающих абелевой группы  $A$ . Найдите  $\max g(A)$  по всем абелевым группам  $A$  порядка 315000, укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.
- Задача 29.** Сколько различных разложений в прямую сумму двух собственных подгрупп имеет абелева группа а)  $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(13)$  б)  $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(7)$  в)  $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(49)$ ?
- Задача 30.** Есть ли в абелевой группе  $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$  подгруппа, изоморфная а)  $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$  б)  $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$  в)  $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$ ?
- Задача 31.** Являются ли абелевы группы  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  конечно порождёнными?
- Задача 32.** Вычислите  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .
- Задача 33.** Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что абелева группа  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/(p_1^{m_1}) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p_k^{m_k})$ , где все  $p_i$  — простые, является циклической.
- Задача 34.** Сколько элементов в абелевой группе с образующими  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и соотношениями  $-5a_1 + 10a_2 + 10a_3 = -7a_1 + 8a_2 - 2a_3 = 10a_1 - 3a_2 + a_3 - 8a_4 = -9a_2 + 7a_4 = 0$ ?
- Задача 35.** Как меняется определитель при отражении матрицы относительно побочной диагонали?
- Задача 36.** Вычислите определитель матрицы с 3 на главной диагонали и 2 в остальных местах.
- Задача 37.** Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , через значения полинома  $f(x) = \alpha_0 x^n + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$  на корнях  $\sqrt[n+1]{1} \in \mathbb{C}$ .
- Задача 38.** Вычислите все частные производные  $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \dots \partial a_{i_k j_k}}$ .
- Задача 39.** НОД  $2 \times 2$  миноров целочисленной  $3 \times 3$  матрицы равен 12. Может ли её определитель быть равен а) 28 б) 36? Может ли НОД элементов этой матрицы быть равен в) 1 г) 2 д) 3 е) 4 ж) 5 з) 6? Если да — приведите пример, нет — объясните, почему.
- Задача 40.** Существует ли (1) над полем  $\mathbb{Q}$  (2) над каким-нибудь полем линейный оператор с характеристическим и минимальным многочленами а)  $\chi(t) = (t^6 + 1), \mu(t) = (t^2 + 1)$  б)  $\chi(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3, \mu(t) = (t - 1)(t - 2)$  в)  $\chi(t) = (t - 1)^5(t - 2)^5, \mu(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$ ? Если да, то приведите пример.
- Задача 41.** Перечислите, с точностью до подобия, все рациональные матрицы с характеристическим многочленом а)  $(x - 2)^3$  б)  $(x - 3)^4$  в)  $x^4 - 1$  г)  $(x^4 - 1)^2$ . Какие из них диагонализуемы? Какие полупросты? У каких есть циклический вектор?
- Задача 42.** Над полем  $\mathbb{Q}$  найдите жорданову и фробениусову нормальную форму матрицы а)  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 15 & -10 & 3 \\ 18 & -9 & 1 \end{pmatrix}$  б)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -16 & -10 & -8 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  в)  $\begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ -16 & -6 & 4 \\ 28 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ .
- Задача 43.** Существует ли комплексная  $2 \times 4$  матрица с множеством  $2 \times 2$  миноров а)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  б)  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ? Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

<sup>1</sup>Дискриминантом приведённого многочлена  $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$  называется произведение  $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ .

**Задача 44.** Всякая ли квадратная матрица сопряжена своей транспонированной?

**Задача 45.** Перечислите классы подобных матриц в  $\text{Mat}_2(\mathbb{F}_5)$ ,  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_5)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ .

**Задача 46.** Всюду ли плотны в пространстве (1)  $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$  (2)  $\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$   
а) матрицы с циклическим вектором б) диагонализуемые матрицы?

**Задача 47.** Вычислите  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{2023}$ .

**Задача 48.** Конечная группа транзитивно действует на множестве из не менее двух элементов. Всегда ли в ней есть элемент, действующий без неподвижных точек?

**Задача 49.** Какие классы сопряжённости из  $S_n$  распадаются на несколько классов в  $A_n$ ?

**Задача 50.** Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе  $\text{Aut } A_5$ .

**Задача 51.** Перечислите все нормальные подгруппы в группе  $A_4$ .

**Задача 52.** Каждая ли перестановка из  $S_n$  является композицией двух инволюций?

**Задача 53.** Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?

**Задача 54.** Приведите пример таких двух не изоморфных групп  $G_1, G_2$  и их нормальных подгрупп  $H_1 \triangleleft G_1, H_2 \triangleleft G_2$ , что  $H_1 \simeq H_2$  и  $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$ .

**Задача 55.** Изоморфны ли группы а)  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$  и  $S_3$  б)  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$  и  $S_4$  в)  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$  и  $A_4$   
г)  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$  д)  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_3)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/(2)$  е)  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_3)$  и  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/(2)$   
ж)  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$  и  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$  з)  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_4)$  и)  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$  и  $A_5$   
к)  $A_5$  и собственная группа икосаэдра л)  $S_5$  и полная группа икосаэдра.

**Задача 56.** Раскладывается ли группа кватернионных единиц  $Q_8$  в полупрямое произведение двух собственных подгрупп?

**Задача 57.** Перечислите все силовские подгруппы в  $S_7$ .

**Задача 58.** Сколько всего силовских  $p$ -подгрупп в  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ?

**Задача 59.** Перечислите (с точностью до изоморфизма) все группы порядка  
а) 81 б) 63 в) 56 г) 12 д) 8.

**Задача 60.** Опишите группы автоморфизмов групп:

а)  $\mathbb{Z}/(n)$  б)  $\mathbb{Z}/(p) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p)$  в)  $D_3$  г)  $D_4$  д)  $Q_8$ .

У каких из этих групп все автоморфизмы внутренние?