

Программа коллоквиума по элементарной алгебре (по материалам первых трёх четвертей)

- Сюжет 1.** Определение группы, дополнительные свойства единицы и обратных элементов. Образ гомоморфизма групп является подгруппой, а ядро — нормальной подгруппой, равенства $\varphi^{-1}(\varphi(g)) = g$ $\ker(\varphi) = \ker(\varphi)g$. Действие группы G на множестве X , разбиение на орбиты, эффективные, свободные и транзитивные действия, централизаторы и нормализаторы подмножеств в X . Все транспортёры между элементами одной орбиты находятся в биекции друг с другом, стабилизаторы всех элементов одной орбиты сопряжены. Формулы для длины орбиты конечной группы и для числа её орбит на конечном множестве.
- Сюжет 2.** Циклические подгруппы, порядок элемента группы равен порядку порождённой им циклической подгруппы. Левое и правое действие группы на себе, теорема Лагранжа о смежных классах и индексе подгруппы. Присоединённое действие группы на себе, классы сопряжённости, центр. Нормальные подгруппы и фактор группы. Коммутант и его универсальное свойство. Коммутант группы $SL_n(\mathbb{k})$, где \mathbb{k} — поле.
- Сюжет 3.** Группы S_n и A_n . Знак, длина и цикловой тип перестановки. Описание присоединённого действия, класса сопряжённости и централизатора данной перестановки, число элементов в них. Коммутанты S'_n и A'_n . Простота групп A_n с $n \neq 4$.
- Сюжет 4.** p -группы, критерий существования неподвижной точки действия p -группы на конечном множестве, нетривиальность центра p -группы. Теорема Силова и дополнение к ней. Прямое и полупрямое произведения групп, примеры.
- Сюжет 5.** Определение коммутативного кольца и поля. Свойства гомоморфизмов, идеалы и фактор кольца, собственный идеал максимален по включению если и только если фактор по нему поле. Нётеровы кольца, нётеровость кольца многочленов над нётеровым кольцом. Свойства взаимно простых элементов коммутативного кольца. Простые и неприводимые элементы, факториальность, нётерово целостное кольцо факториально если и только если каждый его неприводимый элемент прост. Области главных идеалов (ОГИ), каждое евклидово кольцо является ОГИ, все ОГИ факториальны. Мультипликативные подмножества, кольцо частных и его универсальное свойство, поле частных целостного кольца.
- Сюжет 6.** Деление многочленов с остатком, китайская теорема об остатках в $\mathbb{k}[x]$, где \mathbb{k} — поле. Разложение рациональной функции на простейшие дроби. Корни многочленов, кратность корня, интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполяция с кратными узлами. Кольца и поля $\mathbb{k}[x]/(f)$, отыскание обратных элементов. Мультипликативность содержания многочлена над факториальным кольцом, лемма Гаусса, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Достаточные условия неприводимости и алгоритм Кронекера для разложения на неприводимые множители в $\mathbb{Z}[x]$.
- Сюжет 7.** Кольца вычетов $\mathbb{Z}/(n)$: описание обратимых элементов и отыскание обратных, теорема Эйлера, малая теорема Ферма, китайская теорема об остатках. Характеристика поля, гомоморфизм Фробениуса. Всякая конечная подгруппа в мультипликативной группе поля циклическая. Описание конечных полей с точностью до изоморфизма.
- Сюжет 8.** Кольцо формальных степенных рядов, критерий обратимости ряда, подстановка в ряд ряда без свободного члена, дифференцирование рядов, производные произведения, частного и композиции двух рядов. Поле частных кольца $\mathbb{k}[[x]]$, где \mathbb{k} — поле, вложение $\mathbb{k}(x) \hookrightarrow \mathbb{k}((x))$ и решение линейных рекуррентных уравнений путём разложения рациональной функции в степенной ряд. Экспоненцирование и логарифмирование рядов над полем характеристики нуль являются взаимно обратными изоморфизмами между аддитивной

группой рядов без свободного члена и мультипликативной группой рядов с единичным свободным членом. Биномиальный ряд и формула Ньютона для его коэффициентов.

Сюжет 9. Определение модуля над коммутативным кольцом, подмодули и фактор модули, свойства гомоморфизмов, модуль гомоморфизмов. Прямые суммы модулей и подмодулей, дополнительные подмодули. Определение свободного модуля, ранг свободного модуля, задание модуля образующими и соотношениями. Модуль гомоморфизмов между модулями, заданными образующими и соотношениями.

Сюжет 10. Определение ассоциативной алгебры над коммутативным кольцом, алгебра эндоморфизмов модуля. Алгебра матриц: ассоциативность и дистрибутивность умножения, матрицы переходов и матрицы гомоморфизмов, матричные единицы E_{ij} и их таблица умножения, обратимые матрицы, обращение верхней унитреугольной матрицы, пример: теорема об элементарных симметрических функциях.

Сюжет 11. Определитель матрицы, его полилинейность, кососимметричность и инвариантность относительно транспонирования. Грассмановы многочлены. Миноры и внешняя степень матрицы, мультипликативность внешних степеней, формула Лапласа для разложения определителя по набору строк или столбцов. Присоединённая матрица, тождество $AA^V = A^V A = \det(A)E$. Матрицы над кольцом многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли $\chi_A(A) = 0$.

Сюжет 12. Метод Гаусса над ОГИ, приведение матрицы к нормальной форме Смита, независимость (с точностью до умножения на обратимые элементы кольца) диагональных элементов от способа приведения (теорема об инвариантных множителях для матриц), решение систем линейных уравнений и отыскание обратной матрицы методом Гаусса.

Сюжет 13. Теорема о взаимных базисах конечно порождённого свободного модуля над ОГИ и его подмодуля, независимость (с точностью до умножения на обратимые элементы кольца) инвариантных множителей от выбора взаимных базисов (теорема об инвариантных множителях для подмодуля в свободном модуле). Разложение конечно порождённого модуля над ОГИ K в прямую сумму свободного и модулей вида $K/(p^n)$, где $p \in K$ прост (теорема об элементарных делителях). Свойства подмодулей кручения и p -кручения, цикловой тип модуля p -кручения. Взаимно однозначное соответствие между наборами инвариантных множителей и наборами элементарных делителей, фробениусово и жорданово представления конечно порождённого модуля над ОГИ.

Сюжет 14. Классификация конечно порождённых абелевых групп, фробениусово и жорданово представления. Описание простых, полупростых и неразложимых абелевых групп. Конечно порождённая абелева группа является прямой суммой простых если и только если у любой подгруппы есть дополнительная подгруппа. Описание простых, полупростых и неразложимых абелевых групп. Число элементов в факторе решётки по соизмеримой подрешётке. Подрешётка отщепляется прямым слагаемым, если и только если вес её ненулевые элементарные делители равны единице, и если и только если она является множеством всех решений системы однородных линейных уравнений с целыми коэффициентами.

Сюжет 15. Классификация конечномерных векторных пространств с линейным оператором над произвольным полем, жорданова и фробениусова нормальные формы оператора, элементарные делители и их отыскание по матрице оператора. Характеристический и минимальный многочлены оператора, их выражение через элементарные делители. Циклический базис и цикловой тип нильпотентного оператора N , отыскание циклового типа по размерностям $\dim \ker N^k$. Собственные числа и собственные подпространства, сумма собственных подпространств прямая. Свойства, характеризующие полупростые, диагонализуемые и циклические операторы. Одновременная диагонализация и общий собственный вектор любого множества коммутирующих операторов. Корневое разложение и вычисление функций от оператора при помощи интерполяционных многочленов, существование \sqrt{A} для $A \in GL_n(\mathbb{k})$, где поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто и $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.