Задачи для подготовки к контрольной № 1

ПК1◇1. Найдите наименьшее по модулю целое число с остатками
а) 51, 5, 12 от деления на 91, 51, 23 **б)** 61, 64, 24 от деления на 85, 143, 37.

ответ: в (а) 30809, в (б) −9374.

ПК1◇2. Найдите все целые решения уравнения
а) $143x + 15y + 29z = -12$ **б)** $187x + 35y + 41z = 10$
в) $377x + 1247y = 58$ **г)** $1333x + 403y = -93$.

ответ: в (а) $(t_0, -257t_0 + 29t_1 - 24, 128t_0 - 15t_1 + 12)$,
в (б) $(t_0, 1350t_0 + 41t_1 - 70, -1157t_0 - 35t_1 + 60)$,
в (в) НОД коэффициентов $29 = 10 \cdot 377 - 3 \cdot 1247$, решение $(43t_0 + 20, -13t_0 - 6)$,
в (г) НОД коэффициентов $31 = -3 \cdot 1333 + 10 \cdot 403$, решение $(13t_0 + 9, -43t_0 - 30)$.

ПК1◇3. Решите уравнение: **а)** $x^2 = 71$ в $\mathbb{Z}/(145)$ **б)** $x^2 = 16$ в $\mathbb{Z}/(205)$

ответ: в (а) $145 = 5 \cdot 29$, $[129] = (4, 13)$, $(1, 0) = [-29]$, $(0, 1) = [30]$, решения $(\mp 3, \mp 19) = \{48, 68, 77, 97\}$,
в (б) $205 = 5 \cdot 41$, $[16] = (1, 16)$, $(1, 0) = [41]$, $(0, 1) = [-40]$, решения $(\mp 4, \mp 37) = \{119, 4, 201, 86\}$.

ПК1◇4. Выясните, является ли кольцо $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + x^2 + 3x + 1)$ полем, и найдите в нём элемент $[x^2 + 2x + 2]^{-1}$, если таковой существует.

ответ: $1 = (x^3 + x^2 + 3x + 1) \cdot (-\frac{x}{3} - \frac{1}{3}) + (x^2 + 2x + 2) \cdot (\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3})$, откуда $[x^2 + 2x + 2]^{-1} = [\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}]$.

ПК1◇5. Выясните, является ли кольцо $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + 4x + 1)$ полем, и найдите в нём элемент $[x^2 + 3x]^{-1}$, если таковой существует.

ответ: $1 = (x^3 + 4x + 1) \cdot (\frac{13x}{38} + 1) + (x^2 + 3x) \cdot (-\frac{13x^2}{38} + \frac{x}{38} - \frac{55}{38})$, откуда $[x^2 + 3x]^{-1} = [-\frac{13x^2}{38} + \frac{x}{38} - \frac{55}{38}]$.

ПК1◇6. Кубический полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ принимает значения

$$f(3) = 120\,, \quad f(-2) = 0\,, \quad f(-5) = 216\,, \quad f(-3) = 0\,.$$

Найдите остаток от деления f на $x^2 + 1$.

ответ: $f = -4x^3 - 4x^2 + 56x + 96 \equiv 60x + 100 \mod x^2 + 1$.

ПК1◇7. Кубический полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ принимает значения

$$f(-2) = -4\,, \quad f(-5) = -16\,, \quad f(-3) = 0\,, \quad f(-4) = 0\,.$$

Найдите остаток от деления f на $x^2 - x + 1$.

ответ: $f = 2x^3 + 16x^2 + 38x + 24 \equiv 54x + 6 \mod x^2 - x + 1$.

ПК1◇8. Найдите все общие комплексные корни многочленов
а) $x^4 - 11x^3 + 54x^2 - 152x + 160$ и $x^4 - 7x^3 + 64x - 448$
б) $x^4 - 4x^3 - 13x^2 - 122x - 240$ и $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 93x + 90$.

ответ: в (а) НОД $x^2 - 4x + 16$, его корни $2 - 2\sqrt{3}i$, $2 + 2\sqrt{3}i$,
в (б) НОД $x^2 + 2x + 15$, его корни $-1 - \sqrt{14}i$, $-1 + \sqrt{14}i$.

ПК1◇9. Найдите вещественные и мнимые части всех комплексных корней многочлена
а) $x^2 + (-12 + 13i)x + (23 - 89i)$ **б)** $x^2 + (-7 + 11i)x + (22 - 19i)$.

ответ: в (а) дискриминант $-117 + 44i$, корни $7 - i$, $5 - 12i$,
в (б) дискриминант $-160 - 78i$, корни $5 - 12i$, $2 + i$.