

Задачи для подготовки к контрольной № 2

ПК2♦1. Сколько элементов поля а) F8 б) F9 в) F16 г) F27 являются порождающим элементом мультипликативной группы этого поля?

ОТВЕТ: в (а) в (а) 6, в (б) в (б) 4, в (в) в (в) 8, в (г) в (г) 12.

ПК2♦2. В F3[x] разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов а) x5 + x4 - x2 - x - 1 б) x5 - x4 - x3 - x2 + 1 в) x5 - x4 - x3 - x + 1.

ОТВЕТ: в (а) x5 + x4 - x2 - x - 1 = (x2 - x - 1)(x3 - x2 + 1), в (б) и (в) неприводимы. Над F3 многочлены степени 2 имеют корни 2 и 4, x2 + 1, x2 + x + 1, x2 - x - 1, корни 1, x2 - x - 1, корни 1, x2 - x - 1.

ПК2♦3. Разложите в сумму простейших дробей над полем Q рациональные функции:

а) (x^3 - x^2 + 6x + 4) / (x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36) б) (x^3 + 9x^2 + 6x + 8) / (x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 56x + 32) в) (x^3 - 9x^2 - 6x + 6) / (x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81).

ОТВЕТ: в (а) 19/25 - x/2 + (x+3)/2 - x/25 + (x-2)/45 + (x-2)/29 - x/43 - (x-2)/32 + (x-4)/30 + (x-3)/33 - (x-3)/66.

ПК2♦4. Найдите коэффициент при x^k у следующих рядов из Q[[x]]:

а) (-8x^2 - 5x + 1) / (x^3 - 10x^2 + 32x - 32) б) (-8x^2 + 3x + 7) / (x^3 - x^2 - x + 1) в) (x^2 - 4x + 2) / (x^3 + 6x^2 + 9x + 4).

ОТВЕТ: в (а) разложение на простейшие дроби: -41/41 + 4(x-2)/9 + 147/9 - 164/9 + 147k/165 - 164k/165 + 147k/165. в (б) разложение на простейшие дроби: -x/1 + (x-1)/7 + (x-1)^2/32. в (в) разложение на простейшие дроби: 34/25 - 9(x+4)/25 + (x+1)/7 + 3(x+1)^2/7.

ПК2♦5. Явно выразите ak через k для следующих последовательностей:

- а) a0 = 8, a1 = 81, a2 = 529, ak = 9ak-1 - 24ak-2 + 20ak-3 при k ≥ 3
б) a0 = -9, a1 = 55, a2 = -289, ak = -7ak-1 - 11ak-2 - 5ak-3 при k ≥ 3
в) a0 = 2, a1 = -19, a2 = 105, ak = -7ak-1 - 11ak-2 - 5ak-3 при k ≥ 3.

ОТВЕТ: в (а) ak = -7 * 2^k + 55 * 2^k/79 + 3/79. в (б) ak = (-1)^k * (4k^2 - 4k + 1) / 4. в (в) ak = (-1)^k * (69 * 5^k - 4k - 37) / 16.

ПК2♦6. Вычислите коэффициенты при x^k для всех 0 ≤ k ≤ 3 у степенных рядов

а) ch(-4x^2 + 2x) / sqrt(x^2 + x + 1) б) ln(-3x^2 + 3x + 1) / sqrt(-x^2 - 4x + 1) в) sin(4x^2 - 4x) / sqrt(4x^2 + 2x + 1).

ОТВЕТ: в (а) ch(-4x^2 + 2x) / sqrt(x^2 + x + 1) = 1 + 2x^2 - 8x^3 + O(x^4); в (б) ln(-3x^2 + 3x + 1) / sqrt(-x^2 - 4x + 1) = 1 - x/2 + 2x^2 + O(x^3); в (в) sin(4x^2 - 4x) / sqrt(4x^2 + 2x + 1) = 3x - z/59x^3 + O(x^4).