

§9. Пространство с оператором

9.1. Классификация пространств с оператором. Пусть \mathbb{k} — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над \mathbb{k} , а $F : V \rightarrow V$ — линейный эндоморфизм пространства V . Мы будем называть пару (F, V) *пространством с оператором* или просто *оператором* над \mathbb{k} . Линейное отображение $C : U_1 \rightarrow U_2$ между пространствами с операторами (F_1, U_1) и (F_2, U_2) называется *гомоморфизмом*, если $F_2 \circ C = C \circ F_1$. В этом случае говорят, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \\ F_1 \uparrow & & \uparrow F_2 \\ U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \end{array}$$

коммутативна¹. Если гомоморфизм C биективен, операторы $F_1 : U_1 \rightarrow U_1$ и $F_2 : U_2 \rightarrow U_2$ называются *изоморфными* или *подобными*. Поскольку в этом случае $F_2 = CF_1C^{-1}$, то говорят, что оператор F_2 получается из F_1 *сопряжением* посредством изоморфизма C .

Подпространство $U \subset V$ называется *F-инвариантным*, если $F(U) \subset U$. В этом случае пара $(F|_U, U)$ тоже является пространством с оператором и вложение $U \hookrightarrow V$ представляет собою гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

УПРАЖНЕНИЕ 9.1. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ неприводим.

Оператор $F : V \rightarrow V$ называется *разложимым*, если V раскладывается в прямую сумму двух ненулевых F -инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Все простые операторы неразложимы.

УПРАЖНЕНИЕ 9.2. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ при всех $n > 1$ приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем \mathbb{k} имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности. Очевидно, что всякое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых.

9.1.1. Пространство с оператором как $\mathbb{k}[t]$ -модуль. Задание на пространстве V линейного оператора $F : V \rightarrow V$ эквивалентно заданию на V структуры модуля над кольцом многочленов $\mathbb{k}[t]$. В самом деле, структура $\mathbb{k}[t]$ -модуля включает в себя операцию умножения векторов на переменную $t : v \mapsto tv$, которая является линейным отображением $V \rightarrow V$. Если обозначить его буквой F , то умножение векторов на произвольный многочлен $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m$ происходит по правилу $f(t)v = a_0v + a_1Fv + \dots + a_mF^mv = f(F)v$, где

$$f(F) = a_0\text{Id}_V + a_1F + \dots + a_mF^m$$

есть результат вычисления многочлена f на элементе F в \mathbb{k} -алгебре $\text{End}(V)$. Наоборот, каждый линейный оператор $F : V \rightarrow V$ задаёт на V структуру $\mathbb{k}[t]$ -модуля, в котором умножение вектора $v \in V$ на многочлен $f(t) \in \mathbb{k}[t]$ происходит по формуле $f(t)v \stackrel{\text{def}}{=} f(F)v$. Мы будем обозначать такой $\mathbb{k}[t]$ -модуль через V_F .

¹Произвольная диаграмма отображений называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы.

Гомоморфизм $C : V_F \rightarrow W_G$ между $\mathbb{k}[t]$ -модулями, которые задаются линейными операторами $F : V \rightarrow V$ и $G : W \rightarrow W$, представляет собою \mathbb{k} -линейное отображение $C : V \rightarrow W$, перестановочное с умножением векторов на t , т. е. такое что $C \circ F = G \circ C$. Мы заключаем, что гомоморфизмы пространств с операторами — это то же самое, что $\mathbb{k}[t]$ -линейные отображения между задаваемыми этими операторами $\mathbb{k}[t]$ -модулями. В частности, операторы $F : V \rightarrow V$ и $G : W \rightarrow W$ изоморфны, если и только если изоморфны $\mathbb{k}[t]$ -модули V_F и W_G .

Векторное подпространство $U \subset V$ является $\mathbb{k}[t]$ -подмодулем в модуле V_F , если и только если оператор умножения на t переводит U в себя, т. е. тогда и только тогда, когда это подпространство F -инвариантно. Аналогично, разложимость V в прямую сумму инвариантных подпространств означает разложимость $\mathbb{k}[t]$ -модуля V_F в прямую сумму $\mathbb{k}[t]$ -подмодулей.

Если векторное пространство V конечномерно над \mathbb{k} , то $\mathbb{k}[t]$ -модуль V_F конечно порождён, поскольку любой набор векторов, линейно порождающих V над \mathbb{k} , порождает и модуль V_F над $\mathbb{k}[t]$. В каноническом разложении конечномерного над \mathbb{k} модуля V_F в прямую сумму свободного модуля и подмодуля кручения¹ свободное слагаемое отсутствует, так как оно бесконечномерно над \mathbb{k} . Таким образом, из теоремы об элементарных делителях² и теоремы об инвариантных множителях³ мы получаем следующие два эквивалентных друг другу описания пространств с оператором над произвольным полем \mathbb{k} .

ТЕОРЕМА 9.1 (ЖОРДАНОВО ОПИСАНИЕ В ТЕРМИНАХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ)

Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем \mathbb{k} подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец

$$\mathbb{k}[t]/(p_1^{m_1}(t)) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_k^{m_k}(t)), \quad (9-1)$$

где все многочлены $p_\nu(t) \in \mathbb{k}[t]$ приведены и неприводимы, и слагаемые могут повторяться. Операторы умножения на класс $[t]$, действующие в суммах

$$\mathbb{k}[t]/(p_1^{m_1}(t)) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_k^{m_k}(t)) \quad \text{и} \quad \mathbb{k}[t]/(q_1^{n_1}(t)) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(q_\ell^{n_\ell}(t))$$

изоморфны, если и только если $k = \ell$ и прямые слагаемые можно переставить так, что $p_\nu = q_\nu$ и $m_\nu = n_\nu$ при всех ν . \square

ТЕОРЕМА 9.2 (ФРОБЕНИУСОВО ОПИСАНИЕ В ТЕРМИНАХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ)

Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем \mathbb{k} подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец

$$\mathbb{k}[t]/(f_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(f_r), \quad (9-2)$$

где $r \in \mathbb{N}$, а $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{k}[t]$ — такие приведённые многочлены, что $f_i \mid f_j$ при $i < j$. Два таких оператора на пространствах $\mathbb{k}[t]/(f_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(f_r)$ и $\mathbb{k}[t]/(g_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(g_s)$ подобны, если и только если $r = s$ и $f_i = g_i$ при всех i . \square

¹См. теор. 6.5 на стр. 116.

²См. теор. 6.4 на стр. 114.

³См. 6-12 на стр. 118.

9.1.2. Элементарные делители и инвариантные множители. Многочлены $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{k}[t]$ из теор. 9.2 называются *инвариантными множителями* оператора $F : V \rightarrow V$, а дизъюнктивное объединение¹ всех многочленов $p_v^{m_v}$ из теор. 9.1 называется *набором элементарных делителей* и обозначается через $\mathcal{E}\ell(F)$. Инвариантные множители и элементарные делители связаны китайской теоремой об остатках: $\mathbb{k}[t]/(f_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(f_r) \simeq \bigoplus_{p^m \in \mathcal{E}\ell(F)} \mathbb{k}[t]/(p^m)$ и однозначно определяют друг друга, как это объяснялось в н° 6.3 на стр. 114.

Следствие 9.1

Линейные операторы F и G подобны тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}\ell(F) = \mathcal{E}\ell(G)$. \square

Следствие 9.2

Линейный оператор неразложим тогда и только тогда, когда он подобен оператору умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{k}[t]/(p^m)$, где $p \in \mathbb{k}[t]$ неприводим и приведён. Неразложимый оператор неприводим, если и только если $m = 1$. \square

Следствие 9.3

Многочлен $f \in \mathbb{k}[t]$ тогда и только тогда аннулирует оператор $F : V \rightarrow V$, когда он делится на все элементарные делители оператора F . Аннулирующий оператор F приведённый многочлен наименьшей степени равен последнему инвариантному множителю f_r из разложения (9-2). \square

УПРАЖНЕНИЕ 9.3. Пусть пространство с оператором (F, V) разлагается в прямую сумму F -инвариантных подпространств U_i . Покажите, что $\mathcal{E}\ell(F) = \bigsqcup_i \mathcal{E}\ell(F|_{U_i})$.

9.1.3. Отыскание элементарных делителей. Фиксируем в пространстве V какой-либо базис $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ над полем \mathbb{k} и обозначим через $F_v \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ матрицу оператора $F : V \rightarrow V$ в этом базисе. Напомню², что она однозначно определяется тем, что $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} F_v$ или, подробнее,

$$(F(v_1), \dots, F(v_n)) = (v_1, \dots, v_n) F_v.$$

Так как векторы v_i линейно порождают пространство V над \mathbb{k} , они тем более порождают модуль V_F над $\mathbb{k}[t]$, и $V_F = \mathbb{k}[t]^n/R_v$, где подмодуль $R_v = \ker \pi_v \subset \mathbb{k}[t]^n$ является ядром эпиморфизма³ $\pi_v : \mathbb{k}[t]^n \rightarrow V_F$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \mathbb{k}[t]^n$ в вектор $v_i \in V$, и состоит из всех $\mathbb{k}[t]$ -линейных соотношений между векторами \mathbf{v} в V_F . Таким образом, инвариантные множители оператора F суть отличные от единицы инвариантные множители подмодуля $R_v \subset \mathbb{k}[t]^n$.

Лемма 9.1

Если записывать элементы свободного модуля $\mathbb{k}[t]^n$ в виде координатных столбцов с элементами из $\mathbb{k}[t]$, то подмодуль соотношений $\ker \pi_v \subset \mathbb{k}[t]^n$ линейно порождается над $\mathbb{k}[t]$ столбцами матрицы $tE - F_v$.

Доказательство. Пусть $F_v = (f_{ij})$. Тогда j -й столбец матрицы $tE - F_v$ выражается через стандартный базис \mathbf{e} модуля $\mathbb{k}[t]^n$ как $te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}$. Применяя к этому вектору гомоморфизм π_v ,

¹Каждый элементарный делитель p^m входит в него ровно столько раз, сколько прямых слагаемых вида $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ имеется в разложении (9-1).

²См. н° 5.3.3 на стр. 99.

³См. н° 6.2 на стр. 111.

получаем $\pi_v\left(te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}\right) = tv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = Fv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = 0$. Тем самым все столбцы матрицы $tE - F_v$ лежат в $\ker \pi_v$. Рассмотрим теперь произвольный вектор $h(t) \in \mathbb{k}[t]^n$ и запишем его в виде многочлена от t с коэффициентами в \mathbb{k}^n (ср. с н° 8.4.5 на стр. 139):

$$h(t) = t^m h_m + t^{m-1} h_{m-1} + \dots + t h_1 + h_0, \text{ где } h_i \in \mathbb{k}^n.$$

Этот многочлен можно поделить слева с остатком на многочлен $tE - F_v$ точно также, как делят «уголком» обычные полиномы с постоянными коэффициентами¹. В результате получим равенство вида $t^m h_m + \dots + t h_1 + h_0 = (tE - F_v) \cdot (t^{m-1} g_{m-1} + \dots + t g_1 + g_0) + r$, где $g_i, r \in \mathbb{k}^n$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.4. Убедитесь в этом и проверьте, что остаток от деления $h(t)$ на $tE - A$, где

$$A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}), \text{ равен } A(\dots A(Ah_m + h_{m-1}) + \dots + h_1) + h_0 = A^m h_m + \dots + Ah_1 + h_0 = h(A).$$

Иными словами, вычитая из любого столбца $h(t) \in \mathbb{k}[t]^n$ подходящую $\mathbb{k}[t]$ -линейную комбинацию столбцов матрицы $tE - F_v$, можно получить вектор $r \in \mathbb{k}^n$, т. е. \mathbb{k} -линейную комбинацию $r = \sum \lambda_i e_i$ стандартных базисных векторов $e_i \in \mathbb{k}[t]^n$. Так как столбцы матрицы $tE - F_v$ лежат в $\ker \pi_v$, мы заключаем, что $\pi_v(h(t)) = \pi_v(r) = \sum \lambda_i v_i$. Если $h \in \ker \pi_v$, то $\sum \lambda_i v_i = 0$, что возможно только когда все $\lambda_i = 0$, ибо векторы $v_i \in V$ линейно независимы над \mathbb{k} . Тем самым $r = 0$ для всех $h \in \ker \pi_v$, т. е. $\ker \pi_v$ содержится в $\mathbb{k}[t]$ -линейной оболочке столбцов матрицы $tE - F_v$. \square

Следствие 9.4

Множество $\mathcal{E}\ell(F)$ является дизъюнктивным объединением степеней p^m неприводимых приведённых многочленов из разложений инвариантных множителей $f_i(t)$ матрицы $tE - F_v$. Последние равны диагональным элементам $d_{ii}(t)$ нормальной формы Смита² матрицы $tE - F_v$ и могут быть вычислены по формулам³ $f_i(t) = \Delta_i(tE - F_v) / \Delta_{i-1}(tE - F_v)$, где $\Delta_i(tE - F_v)$ означает нод всех $k \times k$ миноров матрицы $tE - F_v$. \square

9.1.4. Характеристический многочлен. Произведение всех элементарных делителей линейного оператора $F : V \rightarrow V$, по сл. 9.4 равное определителю $\Delta_n = \det(tE - F_v)$, где F_v — матрица оператора F в каком-либо базисе v пространства V , называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается

$$\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - F_v) = \prod_{p^m \in \mathcal{E}\ell(F)} p^m.$$

Из предыдущего вытекает, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса и что подобные операторы имеют одинаковые характеристические многочлены.

УПРАЖНЕНИЕ 9.5. Убедитесь прямым вычислением, что для всех $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$, $C \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ выполняется равенство $\det(tE - CAC^{-1}) = \det(tE - A)$.

Пример 9.1 (характеристический многочлен разложимого оператора)

Если пространство с оператором (F, V) распадается в прямую сумму пространств с операторами (G, U) и (H, W) , то в базисе пространства $V = U \oplus W$, который получен объединением базиса в U и базиса в W , матрица $tE - F$ имеет блочно диагональный вид

$$tE - F = \begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}.$$

¹См. н° 2.2 на стр. 40.

²См. н° 6.1.1 на стр. 103.

³См. прим. 8.3 на стр. 133.

Раскладывая её определитель по первым $\dim U$ столбцам¹, заключаем, что $\chi_F(t) = \chi_G(t)\chi_H(t)$. Это вполне согласуется с [упр. 9.3](#) на стр. 144.

УПРАЖНЕНИЕ 9.6. Убедитесь, что для любого приведённого многочлена $f \in \mathbb{k}[t]$ характеристический многочлен оператора умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{k}[t]/(f)$ равен f .

9.1.5. Минимальный многочлен. Для каждого неприводимого приведённого многочлена $p \in \mathbb{k}[t]$ обозначим через $m_p(F)$ максимальный показатель m , с которым p^m присутствует в наборе $\mathcal{E}\ell(F)$ элементарных делителей оператора F , а для тех неприводимых приведённых многочленов $p \in \mathbb{k}[x]$, степени которых не представлены в $\mathcal{E}\ell F$, положим $m_p(F) = 0$. Таким образом, $m_p(F) = 0$ для всех неприводимых приведённых $p \in \mathbb{k}[x]$ кроме конечного числа. В этих обозначениях [сл. 9.3](#) на стр. 144 можно переформулировать следующим образом: аннулирующий оператор F приведённый многочлен $\mu_F(t)$ наименьшей возможной степени совпадает с инвариантным множителем оператора F наибольшей степени и равен

$$\mu_F(t) = f_r = \prod_p p^{m_p(F)}, \quad (9-3)$$

где произведение берётся по всем приведённым неприводимым $p \in \mathbb{k}[t]$. Многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора $F : V \rightarrow V$. Он порождает ядро гомоморфизма

$$\text{ev}_F : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V), \quad f(t) \mapsto f(F),$$

вычисления многочленов на операторе F и делит в $\mathbb{k}[t]$ все аннулирующие оператор F многочлены, включая характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$. Согласно [сл. 9.4](#) на стр. 145 инвариантный множитель наибольшей степени оператора F равен отношению $\det(tE - F)$ к нод всех миноров порядка $n - 1$ матрицы $tE - F$, где $n = \dim V$. Таким образом, $\chi_F/\mu_F = \Delta_{n-1}(tE - F)$ для любого ненулевого линейного оператора F на n -мерном векторном пространстве.

Пример 9.2 (отыскание минимального многочлена)

Вычисление минимального многочлена оператора $F : V \rightarrow V$ по явной детерминантной формуле довольно трудоёмко, и на практике обычно используют следующие соображения. Для каждого вектора $v \in V$ существует такой приведённый многочлен $\mu_{v,F}(t)$ наименьшей степени, что $\mu_{v,F}(F)v = 0$. Чтобы написать его явно, надо найти наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что вектор $F^k v$ линейно выражается через векторы $v, Fv, \dots, F^{k-1}v$. Если это выражение имеет вид $F^k v = \mu_1 F^{k-1}v + \dots + \mu_{k-1} Fv + \mu_k v$, то $\mu_{v,F}(t) = t^k - \mu_1 t^{k-1} - \dots - \mu_{k-1} t - \mu_k$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.7. Убедитесь, что любой аннулирующий оператор F многочлен делится на все многочлены $\mu_{v,F}$, где $v \in V$.

Мы заключаем, что минимальный многочлен μ_F оператора F равен нок многочленов $\mu_{v_i,F}$ каких-нибудь векторов $v = v_1, \dots, v_m$, линейно порождающих пространство V над \mathbb{k} .

УПРАЖНЕНИЕ 9.8. Убедитесь в этом.

Вычислим, к примеру, минимальный многочлен оператора $F : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, заданного в стандартном базисе e_1, \dots, e_4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

¹См. формулу (8-16) на стр. 135.

Векторы¹

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Fe_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F^2e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Чтобы выяснить, выражается ли через них вектор²

$$F^3e_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

необходимо решить неоднородную систему с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array} \right).$$

Методом Гаусса преобразуем эту матрицу к приведённому ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

и получаем решение $(-4, 4, 1)$, т. е. $F^3e_1 = -4e_1 + 4Fe_1 + F^2e_1$. Таким образом, минимальный многочлен от оператора F , аннулирующий вектор e_1 , равен $F^3 - F^2 - 4F + 4E$. Вычисляя

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 9 & 9 \\ 16 & 24 & -16 & -16 \\ 7 & 14 & -6 & -7 \\ 9 & 9 & -9 & -8 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $A^3 - A^2 - 4A + 4E = 0$. Тем самым, $\mu_F = t^3 - t^2 - 4t + 4$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.9. Как действует умножение на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda)$ и в прямой сумме конечного множества таких факторколец?

9.1.6. Линейные операторы над алгебраически замкнутым полем. Если основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, то неприводимые приведённые многочлены в $\mathbb{k}[t]$ исчерпываются линейными двучленами $(t - \lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{k}$. Оператор умножения на класс $[t] = [\lambda] + [t - \lambda]$ в факторкольце $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$ является суммой скалярного оператора $\lambda \text{Id} : [g] \mapsto \lambda[g]$, умножающего все векторы на λ , и оператора умножения на класс $[t - \lambda]$, который действует на состоящий из векторов $e_i = [(t - \lambda)^{m-i}]$, $1 \leq i \leq m$, базис пространства $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$ по правилу

$$0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow e_3 \leftarrow \dots \leftarrow e_{m-1} \leftarrow e_m. \quad (9-4)$$

¹Векторы Fe_1 и F^2e_1 суть первые столбцы матриц A и A^2 .

²Это первый столбец матрицы A^3 .

Таким образом, умножение на класс $[t]$ задаётся в базисе e_1, \dots, e_n матрицей

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (9-5)$$

которая называется *жордановой клеткой* размера m с *собственным числом* λ . По [теор. 9.1](#) каждый линейный оператор F над алгебраически замкнутым полем подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец вида $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$, и два таких оператора подобны, если и только если прямые суммы отличаются друг от друга перестановкой слагаемых. На языке матриц сказанное означает, что любая квадратная матрица A над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} сопряжена блочно диагональной матрице, по главной диагонали которой располагаются жордановы клетки (9-5), причём эта блочно диагональная матрица однозначно с точностью до перестановки клеток определяется матрицей A . Она называется *жордановой нормальной формой* матрицы A . Две матрицы сопряжены, если и только если у них одинаковые с точностью до перестановки клеток жордановы нормальные формы.

Объединение всех жордановых клеток оператора $F : V \rightarrow V$ с заданным собственным числом $\lambda \in \mathbb{k}$ представляет собою матрицу, описывающую действие оператора F на подмодуле $(t - \lambda)$ -кручения, который обозначается $K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : (\lambda \text{Id} - F)^m v = 0\}$ и называется *корневым подпространством* оператора F , отвечающим собственному числу λ . Как $\mathbb{k}[t]$ -модуль он изоморфен прямой сумме $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^{m_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^{m_\ell})$, в которой собраны все элементарные делители оператора F вида $(t - \lambda)^m$. Упорядоченный по нестрогому убыванию $m_1 \geq \dots \geq m_\ell$ набор показателей (m_1, \dots, m_ℓ) называется *цикловым типом* корневого подпространства K_λ . Его удобно изображать диаграммой Юнга из строк длины m_1, \dots, m_ℓ . Эти показатели в точности равны размерам жордановых клеток с оператора F с собственным числом λ . Наибольший из них m_1 равен кратности корня $t = \lambda$ в минимальном многочлене $\mu_F(t)$ оператора F и обозначается m_λ . Сумма $m_1 + \dots + m_\ell$ всех показателей равна кратности того же корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$. Обратите внимание, что характеристический и минимальный многочлены имеют одинаковый набор корней. Он называется *спектром* оператора F и обозначается $\text{Spec } F$, а сами корни $\lambda \in \text{Spec } F$ называются *собственными числами* или *собственными значениями* оператора F .

По [лем. 6.3](#) на стр. 117 высота \mathbb{k} -го столбца диаграммы (m_1, \dots, m_ℓ) равна размерности векторного пространства $\ker(F - \lambda E)^k / \ker(F - \lambda E)^{k-1}$ над полем $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda) \simeq \mathbb{k}$, т. е. разности $\dim \ker(F - \lambda E)^k - \dim \ker(F - \lambda E)^{k-1}$. Таким образом, для отыскания жордановой нормальной формы оператора F над алгебраически замкнутым полем достаточно взять какой-нибудь аннулирующий оператор F многочлен¹ $f \in \mathbb{k}[t]$, разложить его на линейные множители:

$$f(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

и для каждого корня λ многочлена f вычислить размерности $d_k = \dim \ker(F - \lambda E)^k$ для всех таких $k \geq 1$, что $d_k > d_{k-1}$, где мы полагаем $d_0 = 0$. При наступлении равенства² $d_{k+1} = d_k$,

¹Например, характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$.

²А оно заведомо наступит при некотором $k \leq m(\lambda)$.

вычисление прекращается. Размеры $m_1 \geq \dots \geq m_r$ жордановых клеток оператора F с собственным числом λ равны длинам строк диаграммы Юнга, k -тый столбец которой имеет длину $d_k - d_{k-1}$.

ПРИМЕР 9.3 (ОТЫСКИВАНИЕ ЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ)

Найдём жордановы нормальные формы матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -9 & -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 1 \\ -6 & -5 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -9 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя след, сумму главных 2×2 -миноров, сумму главных 3×3 -миноров и определитель каждой из матриц, находим характеристические многочлены, после чего раскладываем их на линейные множители:

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= t^4 + t^3 - 7t^2 - 13t - 6 = (t+1)^2(t+2)(t-3), \\ \chi_B(t) &= t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t + 4 = (t+1)^2(t-2)^2, \\ \chi_C(t) &= t^4 + 5t^3 + 6t^2 - 4t - 8 = (t-1)(t+2)^3. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица A имеет два одномерных корневых подпространства с собственными числами -2 и 3 и двумерное корневое подпространство с собственным числом -1 , цикловой типа которого (2) или $(1, 1)$. Первому случаю отвечает $\dim \ker(A + E) = 1$, или $\text{rk}(A + E) = 3$, а второму — $\dim \ker(A + E) = 2$, или $\text{rk}(A + E) = 2$. Так как левый верхний угловой 3×3 минор матрицы $A + E$ равен

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -9 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 8 - 3 - 9 = -4,$$

мы заключаем, что имеет место первое, т. е. у A одна жорданова клетка размера 2×2 с собственным числом -1 , и жорданова нормальная форма матрицы A такова:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица B имеет два двумерных корневых подпространства с собственными числами $\lambda = -1, 2$. Их цикловые типы, как и выше, определяются размерностями ядер матриц

$$(B + E) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \\ -6 & -5 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (B - 2E) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ -6 & -5 & -10 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первая матрица имеет ранг 2 , а вторая — 3 , мы заключаем, что B имеет две клетки 1×1 с собственным числом -1 и одну клетку 2×2 с собственным числом 2 , т. е. жорданова

нормальная форма матрицы B такова:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица C имеет одну жорданову клетку 1×1 с собственным числом 1 и трёхмерное корневое подпространство с собственным числом -2 , цикловой тип которого может быть (3) , или $(2, 1)$, или $(1, 1, 1)$. Эти случаи тоже отличаются друг от друга размерностью ядра оператора $C + 2E$, которая равна для них соответственно 1, 2, или 3. Так как ранг матрицы

$$C + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ -6 & 3 & 1 & -1 \\ -9 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 3, мы заключаем, что имеет место первый случай, и жорданова нормальная форма матрицы C такова:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.1.7. Нормальные формы матриц над незамкнутыми полями. Так как матрица умножения на t в факторкольце $k[x]/(f)$, где $f = t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$, имеет в базисе из классов многочленов $t^{m-1}, \dots, t, 1$ вид

$$F(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & & & \\ -a_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{d-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_d & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9-6)$$

из теор. 9.2 на стр. 143 вытекает, что каждая матрица над произвольным полем \mathbb{k} подобна единственной блочно диагональной матрице, составленной из блоков $F(f_1), \dots, F(f_r)$ вида (9-6), где $f_i \mid f_j$ при $i < j$. Такая блочно диагональная матрица называется *фробениусовой нормальной формой*. Обратите внимание, что последний многочлен f_r в нормальной форме Фробениуса равен минимальному многочлену μ_F оператора F .

Аналогом жордановой клетки (9-5) над произвольным полем \mathbb{k} является матрица умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{k}[t]/(p^m)$, где $p = t^d + a_1 t^{d-1} + \dots + a_d \in \mathbb{k}[t]$ — неприводимый приведённый многочлен, записанный в базисе

$$p^{m-1}t^{d-1}, \dots, p^{m-1}t, p^{m-1}, p^{m-2}t^{d-1}, \dots, p^{m-2}t, p^{m-2}, \dots, \dots, \dots, t^{d-1}, \dots, t, 1, \quad (9-7)$$

который состоит из m последовательных фрагментов вида $p^k t^{m-1}, \dots, p^k t, p^k$ длины d , получающихся из самого правого фрагмента $t^{d-1}, \dots, t, 1$ умножением на p^k , где $k = 0, 1, \dots, m-1$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.10. Убедитесь, что классы многочленов (9-7) действительно образуют базис в $\mathbb{k}[t]/(p^m)$.

а его фробениусова нормальная форма получается из разложения $V = \mathbb{R}[t]/(f_1) \oplus \mathbb{R}[t]/(f_2)$, где $f_1 = t + 1$, $f_2 = (t^2 + 1)^2(t + 1)^2 = t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$, и содержит две клетки:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9-9)$$

Умножение на t в аналогичном комплексном векторном пространстве

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{C}[t]/((t^2 + 1)^2) \oplus \mathbb{C}[t]/((t + 1)^2) \oplus \mathbb{C}[t]/(t + 1) \simeq \\ &\simeq \mathbb{C}[t]/((t - i)^2) \oplus \mathbb{C}[t]/((t + i)^2) \oplus \mathbb{C}[t]/((t + 1)^2) \oplus \mathbb{C}[t]/(t + 1) \end{aligned}$$

имеет над полем \mathbb{C} жорданову нормальную форму из 4-х клеток размеров 2, 2, 2, 1:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

а его фробениусова нормальная форма совпадает с (9-9).

В общем случае объединение всех жордановых клеток (9-8), отвечающих данному неприводимому приведённому многочлену $p \in \mathbb{k}[t]$, описывает действие оператора $F : V \rightarrow V$ на подмодуле $p(F)$ -крючения

$$K_p \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : p(F)^m v = 0\} \simeq \mathbb{k}[t]/(p^{m_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(p^{m_\ell})$$

(в правой части собраны все элементарные делители оператора F вида p^m). Упорядоченный по нестрогую убыванию $m_1 \geq \dots \geq m_\ell$ набор показателей (m_1, \dots, m_ℓ) называется *цикловым типом* подпространства K_p . Наибольший из них m_1 равен степени, в которой p входит в разложение минимального многочлена $\mu_F(t)$ на неприводимые множители в кольце $\mathbb{k}[t]$ и обозначается m_p . Сумма $m_1 + \dots + m_\ell$ всех показателей равна степени, в которой p входит в разложение характеристического многочлена $\chi_F(t)$. По лем. 6.3 на стр. 117 высота \mathbb{k} -го столбца диаграммы Юнга (m_1, \dots, m_ℓ) равна размерности векторного пространства $\ker p(F)^k / \ker p(F)^{k-1}$ над полем $\mathbb{k}[t]/(p)$, которое в свою очередь является векторным пространством размерности $\deg p$ над полем \mathbb{k} . Поэтому высота k -того столбца диаграммы (m_1, \dots, m_ℓ) равна отношению

$$(\dim_{\mathbb{k}} \ker p(F)^k - \dim_{\mathbb{k}} \ker p(F)^{k-1}) / \deg p.$$

ПРИМЕР 9.4

Выясним, подобны ли друг другу над полем \mathbb{F}_5 матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обе матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен

$$\det(tE - A) = \det(tE - B) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = (t^2 + t + 1)^2,$$

где $p(t) = t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_5[t]$ неприводим над \mathbb{F}_5 . Поэтому всё пространство \mathbb{F}_5^4 является модулем p -крючения и имеет цикловой тип (2) или (1, 1). В первом случае многочлен p не аннулирует матрицу, а во втором — аннулирует. Так как

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

и тем самым $p(A) = A^2 + A + E \neq 0$, а $p(B) = B^2 + B + E = 0$, мы заключаем, что матрицы не подобны. Отметим, что из проделанных вычислений вытекает, что жорданова и фробениусова нормальные формы матрицы A имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а жорданова нормальная форма матрицы B совпадает с фробениусовой и имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.2. Специальные классы операторов. В этом разделе мы подробно остановимся на свойствах нескольких специальных классов операторов, играющих важную роль в различных задачах из разных областей математики.

9.2.1. Нильпотентные операторы. Линейный оператор $F: V \rightarrow V$ называется *нильпотентным*, если $F^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Так как нильпотентный оператор аннулируется многочленом t^m , все его элементарные делители являются степенями t . В частности, минимальный многочлен тоже является степенью t и, будучи делителем характеристического многочлена, имеет степень не выше $\dim V$. Поэтому в определении нильпотентного оператора можно без ограничения общности считать, что $m \leq \dim V$. По теор. 9.1 нильпотентный оператор изоморфен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец вида

$$\mathbb{k}[t]/(t^{v_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(t^{v_k}), \quad (9-10)$$

и два таких оператора изоморфны друг другу, если и только если выписанные в порядке нестрогого убывания наборы показателей $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k$ у них одинаковы. Таким образом, нильпотентные операторы над произвольным полем \mathbb{k} взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга ν . Диаграмма $\nu(F)$, характеризующая нильпотентный оператор F , называется его *цикловым типом*.

Умножение на t действует на состоящий из векторов $e_i = [t^{m-i}]$ базис в $\mathbb{k}[t]/(t^m)$ так¹:

$$0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow e_3 \leftarrow \dots \leftarrow e_{m-1} \leftarrow e_m$$

и имеет в этом базисе матрицу

$$J_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая называется *нильпотентной жордановой клеткой* размера m . Тем самым, для nilьпотентного оператора F циклового типа $\nu(F)$ в пространстве V имеется базис, векторы которого размещаются по клеткам диаграммы $\nu(F)$ так, что F переводит каждый из них в левый соседний, а все векторы самого левого столбца — в нуль:

$$\begin{array}{c} \square \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \square \\ \square \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \end{array} \quad (9-11)$$

Базис такого вида называется *циклическим* или *жордановым* базисом nilьпотентного оператора F , а наборы базисных векторов, стоящие по строкам диаграммы, называются *жордановыми цепочками*. Так как сумма длин первых m столбцов диаграммы $\nu(F)$ равна $\dim \ker F^m$, длина m -того столбца диаграммы $\nu(F)$ равна $\dim \ker F^m - \dim \ker F^{m-1}$.

9.2.2. Полупростые операторы. Прямая сумма простых² пространств с операторами называется *полупростым* или *вполне приводимым* пространством с оператором.

Предложение 9.1

Следующие свойства оператора $F : V \rightarrow V$ эквивалентны друг другу:

- 1) V является прямой суммой неприводимых F -инвариантных подпространств
- 2) V линейно порождается неприводимыми F -инвариантными подпространствами
- 3) для каждого ненулевого F -инвариантного подпространства $U \subsetneq V$ существует такое F -инвариантное подпространство $W \subset V$, что $V = U \oplus W$
- 4) оператор F подобен умножению на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец

$$\mathbb{k}[t]/(p_1) \oplus \mathbb{k}[t]/(p_2) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_r),$$

где $p_i \in \mathbb{k}[t]$ приведены и неприводимы³ (но не обязательно различны).

¹См. формулу (9-4) на стр. 147.

²В другой терминологии — неприводимых, см. начало н° 9.1 на стр. 142.

³Иными словами, в прямой сумме (9-1) из теор. 9.1 все показатели степеней $m_i = 1$.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) очевидна. Импликация (2) \Rightarrow (3) вытекает из лем. 7.1 на стр. 125. Для лучшего понимания происходящего повторим её доказательство в нашем нынешнем контексте. Для каждого неприводимого F -инвариантного подпространства $L \subset V$ пересечение $L \cap U$, будучи F -инвариантным подпространством в L , либо нулевое, либо совпадает с L . Если все неприводимые инвариантные подпространства $L \subset V$ лежат в U , то $U = V$ в силу (2), и доказывать нечего. Если есть ненулевое неприводимое F -инвариантное подпространство $L_1 \subset V$ с $L_1 \cap U = 0$, заменим U на $U \oplus L_1$ и повторим рассуждение. Поскольку размерность подпространства U на каждом таком шагу строго увеличивается, через конечное число шагов получится равенство $U \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_k = V$, и можно взять $W = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$.

Чтобы доказать импликацию (3) \Rightarrow (4), покажем сначала, что если свойство (3) выполнено для пространства V , то оно выполнено и для каждого F -инвариантного подпространства $H \subset V$. Рассмотрим любое инвариантное подпространство $U \subset H$ и отыщем в V такие инвариантные подпространства Q и R , что $V = H \oplus Q = U \oplus Q \oplus R$. Рассмотрим проекцию $\pi : V \rightarrow H$ с ядром Q и положим $W = \pi(R)$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.12. Проверьте, что $H = U \oplus W$.

Итак, если свойство (3) выполнено для прямой суммы факторколец (9-1) из теор. 9.1, то оно выполнено и для каждого слагаемого этой суммы. Однако по сл. 9.2 пространство $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ при $m > 1$ приводимо, но неразложимо.

Импликация (4) \Rightarrow (1) также немедленно вытекает из сл. 9.2. \square

Следствие 9.5 (из доказательства ПРЕДЛ. 9.1)

Ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство также является полупростым оператором. \square

9.2.3. Циклические векторы. Вектор $v \in V$ называется *циклическим вектором* линейного оператора $F : V \rightarrow V$, если его F -орбита v, Fv, F^2v, F^3v, \dots линейно порождает пространство V над полем \mathbb{k} . Иначе можно сказать, что вектор v порождает модуль V_F над $\mathbb{k}[t]$.

Предложение 9.2

Следующие свойства оператора $F : V \rightarrow V$ эквивалентны друг другу:

- 1) F обладает циклическим вектором
- 2) F подобен умножению на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{k}[t]/(f)$, где $f \in \mathbb{k}[t]$
- 3) простые основания всех элементарных делителей оператора F попарно различны
- 4) минимальный многочлен оператора F совпадает с характеристическим.

Доказательство. Условия (2), (3), (4) очевидно эквивалентны и означают, что оператор F подобен умножению на $[t]$ в прямой сумме факторколец $\mathbb{k}[t]/(p_1^{m_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_r^{m_r})$, где все неприводимые приведённые многочлены p_1, \dots, p_r попарно различны. Импликация (2) \Rightarrow (1) тоже очевидна: $\mathbb{k}[t]$ -модуль $\mathbb{k}[t]/(f)$ порождается над $\mathbb{k}[t]$ классом $[1]$. Наоборот, если модуль V_F порождается над $\mathbb{k}[t]$ одним вектором v , то $V_F \simeq \mathbb{k}[t]/\ker \pi$, где эпиморфизм $\pi : \mathbb{k}[t] \rightarrow V_F$ переводит $h(t)$ в $h(F)v$. Поскольку $\mathbb{k}[t]$ — область главных идеалов, $\ker \pi = (f)$ для некоторого $f \in \mathbb{k}[t]$, откуда $V \simeq \mathbb{k}[t]/(f)$. \square

9.2.4. Собственные подпространства и собственные числа. Максимальное по включению ненулевое подпространство в V , на котором оператор $F : V \rightarrow V$ действует как умножение на скаляр $\lambda \in \mathbb{k}$, называется *собственным подпространством* оператора F с *собственным числом* или *собственным значением* λ и обозначается $V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \text{Id}_V - F)$. Ненулевые векторы $v \in V_\lambda$ называются *собственными векторами* оператора F с собственным числом¹ λ .

Предложение 9.3

Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы v_1, \dots, v_m имеют попарно разные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и линейно зависимы. Рассмотрим линейное соотношение между ними, в котором задействовано минимально возможное число векторов. Пусть это будут векторы e_1, \dots, e_k . Тогда $k \geq 2$ и $e_k = x_1 e_1 + \dots + x_{k-1} e_{k-1}$, где все $x_i \in \mathbb{k}$ отличны от нуля. При этом $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$. Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на λ_k , получаем более короткую зависимость $x_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \dots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0$ с ненулевыми коэффициентами. \square

Следствие 9.6

Сумма ненулевых собственных подпространств с попарно разными собственными числами является прямой. \square

9.2.5. Спектр. Множество собственных чисел линейного оператора $F : V \rightarrow V$, т.е. всех таких $\lambda \in \mathbb{k}$, что $V_\lambda = \ker(\lambda \text{Id}_V - F) \neq 0$, называется *спектром*² оператора F и обозначается

$$\text{Спекс } F = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \ker(\lambda \text{Id}_V - F) \neq 0\} = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \det(tE - F) = 0\},$$

или $\text{Спекс}_{\mathbb{k}} F$, если важно явно указать основное поле. Так как $\ker(\lambda \text{Id}_V - F) \neq 0$, если и только если $\det(tE - F) = 0$, спектр представляет собою множество корней характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ в поле \mathbb{k} . Над алгебраически замкнутым полем спектр любого оператора не пуст и совпадает с множеством собственных чисел жордановых клеток оператора F , о котором шла речь в н° 9.1.6 на стр. 147 выше. Над произвольным полем количество различных собственных чисел в спектре не превосходит $\deg \chi_F = \dim V$, что согласуется со сл. 9.6, согласно которому

$$\sum_{\lambda \in \text{Спекс } F} \dim V_\lambda \leq \dim V. \quad (9-12)$$

Упражнение 9.13. Покажите, что $\text{Спекс } F$ содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего F .

Если известен спектр F , отыскание собственных подпространств сводится к решению систем линейных однородных уравнений $(\lambda \text{Id}_V - F)v = 0$, которые гарантированно имеют ненулевые решения при $\lambda \in \text{Спекс } F$.

Следствие 9.7

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любой оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством. \square

¹Или собственным значением.

²Ср. с н° 9.1.6 на стр. 147.

УПРАЖНЕНИЕ 9.14. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} оператор F нильпотентен, если и только если $\text{Spes } F = \{0\}$, и приведите пример оператора, для которого неравенство (9-12) строгое.

9.2.6. Диагонализуемые операторы. Оператор $F : V \rightarrow V$ называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис, в котором F записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора F , а элементы диагональной матрицы суть собственные числа F , причём каждое собственное число $\lambda \in \text{Spes } F$ встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ и какова размерность собственного подпространства V_λ . Иначе можно сказать, что диагонализуемый оператор F подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец¹ $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda) \simeq \mathbb{k}$, где λ пробегает $\text{Spes } F$, и каждое такое прямое слагаемое представлено в сумме ровно $\dim V_\lambda$ раз.

Предложение 9.4

Следующие свойства линейного оператора $F : V \rightarrow V$ эквивалентны:

- 1) F диагонализуем
- 2) пространство V линейно порождается собственными векторами оператора F
- 3) все элементарные делители F имеют вид $(t - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{k}$
- 4) характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ полностью раскладывается в $\mathbb{k}[t]$ на линейные множители, и кратность каждого его корня λ равна размерности собственного подпространства V_λ
- 5) оператор F можно аннулировать многочленом, который раскладывается в $\mathbb{k}[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей.

Доказательство. Эквивалентность свойств (3) и (5) очевидна. Эквивалентность свойств (1), (2), (3) и импликация (1) \Rightarrow (4) были установлены перед формулировкой предл. 9.4. Из (4) вытекает, что $\sum \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$. Поэтому прямая по сл. 9.6 сумма всех различных собственных подпространств V_λ совпадает с V , что даёт импликацию (4) \Rightarrow (1). \square

Следствие 9.8

Если оператор $F : V \rightarrow V$ диагонализуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (5) предл. 9.4. \square

УПРАЖНЕНИЕ 9.15. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем диагонализуемость равносильна полупростоте.

¹Ср. с упр. 9.9 на стр. 147.

9.2.7. Что стоит за аннулирующим многочленом? Если известно разложение на простые множители того или иного многочлена, аннулирующего линейный оператор¹ $F : V \rightarrow V$, то это, во-первых, оставляет лишь конечное число возможностей для набора элементарных делителей $\mathcal{E}\ell(F)$ оператора F , а во-вторых, позволяет явно строить F -инвариантные подпространства в V и/или раскладывать V в прямую сумму таких подпространств в терминах действия F непосредственно на пространстве V .

ПРИМЕР 9.5 (ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ВЕЩЕСТВЕННОГО ОПЕРАТОРА)

Покажем, что над полем вещественных чисел \mathbb{R} любой конечномерный линейный оператор F обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством. Пусть $\chi_F = q_1 \dots q_m$, где $q_i \in \mathbb{R}[t]$ — неприводимые приведённые линейные или квадратичные многочлены, не обязательно различные. Применим нулевой оператор $0 = \chi_F(F) = q_1(F) \circ q_2(F) \circ \dots \circ q_m(F)$ к какому-нибудь ненулевому вектору $v \in V$. При некотором $i \geq 0$ получится такой ненулевой вектор $w = q_{i+1}(F) \circ \dots \circ q_m(F)v$, что $q_i(F)w = 0$. Если $q_i(t) = t - \lambda$ линейен, то $F(w) = \lambda w$ и вектор w порождает одномерное F -инвариантное подпространство. Если $q_i(t) = t^2 - \alpha t - \beta$ квадратичен, то $F(Fw) = \alpha F(w) + \beta w$ лежит в линейной оболочке векторов w и Fw , которая тем самым является F -инвариантным подпространством размерности не больше 2.

ПРИМЕР 9.6 (ИНВОЛЮЦИИ)

Линейный оператор $\sigma : V \rightarrow V$ называется *инволюцией*, если он удовлетворяет соотношению $\sigma^2 = \text{Id}_V$, т. е. аннулируется многочленом $t^2 - 1$. Тожественная инволюция $\sigma = \text{Id}_V$ называется *тривиальной*. Так как $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$ является произведением различных линейных множителей, все инволюции диагонализуемы, причём спектр любой инволюции исчерпывается числами ± 1 . Таким образом, любое пространство V с инволюцией $\sigma \neq \pm \text{Id}_V$ распадается в прямую сумму $V = V_+ \oplus V_-$ собственных подпространств $V_+ = \ker(\sigma - \text{Id}_V) = \text{im}(\sigma + \text{Id}_V)$ и $V_- = \ker(\sigma + \text{Id}_V) = \text{im}(\sigma - \text{Id}_V)$ с собственными числами ± 1 , и любой вектор $v \in V$ однозначно записывается как $v = v_+ + v_-$, где $v_{\pm} \in V_{\pm}$ находятся по формулам $v_+ = (v + Fv)/2$, $v_- = (v - Fv)/2$.

ТЕОРЕМА 9.3 (ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть линейный оператор $F : V \rightarrow V$ на произвольном² векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} аннулируется произведением $q = q_1 \dots q_r$ попарно взаимно простых многочленов $q_i \in \mathbb{k}[t]$. Положим $Q_j = q/q_j$. Тогда $\ker q_j(F) = \text{im } Q_j(F)$ при всех j , эти подпространства F -инвариантны, и V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$, имеем включение $\text{im } Q_j(F) \subset \ker q_i(F)$. Поэтому достаточно показать, что V линейно порождается образами операторов $Q_i(F)$, а сумма ядер $\ker q_i(F)$ прямая³, т. е. $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$ для всех i . Первое вытекает из того, что $\dots(Q_1, \dots, Q_r) = 1$, а значит, существуют такие $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{k}[t]$, что $1 = \sum Q_j(t)h_j(t)$. Подставляя в это равенство $t = F$ и применяя обе части к произвольному вектору $v \in V$, получаем разложение $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \text{im } Q_j(F)$. Второе вытекает из взаимной простоты q_i и Q_i , в силу которой существуют такие $g, h \in \mathbb{k}[t]$, что $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$. Подставим сюда $t = F$ и применим обе части полученного равенства $E = g(F)q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$ к произвольному вектору $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$. Так как $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$ при всех $j \neq i$, получим $v = Ev = g(F)q_i(F)v + h(F)Q_i(F)v = 0$, что и требовалось. \square

¹ Например, характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$.

² Возможно даже бесконечномерном.

³ См. предл. 5.2 на стр. 85.

Пример 9.7 (проекторы)

Линейный оператор $\pi : V \rightarrow V$ называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t - 1)$, т. е. удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. По [теор. 9.3](#) образ любого идемпотента $\pi : V \rightarrow V$ совпадает с подпространством его неподвижных векторов: $\text{im } \pi = \ker(\pi - \text{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$, и всё пространство распадается в прямую сумму $V = \ker \pi \oplus \text{im } \pi$. Тем самым, оператор π проектирует V на $\text{im } \pi$ вдоль $\ker \pi$. Отметим, что оператор $\text{Id}_V - \pi$ тоже является идемпотентом и проектирует V на $\ker \pi$ вдоль $\text{im } \pi$. Таким образом, задание прямого разложения $V = U \oplus W$ равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов $\pi_1 = \pi_1^2$ и $\pi_2 = \pi_2^2$ пространства V , связанных соотношениями $\pi_1 + \pi_2 = 1$ и $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.16. Выведите из этих соотношений, что $\ker \pi_1 = \text{im } \pi_2$ и $\text{im } \pi_1 = \ker \pi_2$.

9.3. Функции от операторов. Всюду в этом разделе мы предполагаем, что линейный оператор $F : V \rightarrow V$ действует на конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} , которое мы будем обозначать через \mathbb{K} , и аннулируется многочленом

$$\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}, \text{ где } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \quad (9-13)$$

который полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$. Последнее означает, что минимальный и характеристический многочлены оператора F тоже полностью разлагались на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, и в практических вычислениях в качестве $\alpha(t)$ обычно берётся характеристический многочлен $\chi_F(t)$ оператора F . Однако, чем меньше степень многочлена $\alpha(t)$, тем проще будут все предстоящие нам вычисления.

Сделанные нами предположения на оператор F равносильны тому, что $\mathcal{E}\ell(F)$ исчерпывается степенями линейных двучленов $(t - \lambda)^m$, $\lambda \in \text{Spec } F$. В этой ситуации $\mathbb{K}[t]$ -модуль V_F является прямой суммой $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$ *корневых подпространств*¹

$$K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : (\lambda \text{Id} - F)^m v = 0\} = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}, \quad (9-14)$$

биективно соответствующих собственным числам $\lambda \in \text{Spec } F$. Показатель m_λ в правой части формулы (9-14) равен кратности корня $t = \lambda$ минимального многочлена $\mu_F(t)$ оператора² F . Множество корней $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ многочлена (9-13) содержит $\text{Spec}(F)$ и для каждого $\lambda \in \text{Spec } F$ показатель m_λ не больше кратности корня $t = \lambda$ многочлена (9-13).

УПРАЖНЕНИЕ 9.17. Не прибегая к [теор. 9.1](#) на стр. 143, выведите существование *корневого разложения* $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$ из тождества Гамильтона – Кэли и [теор. 9.3](#) на стр. 158.

9.3.1. Гомоморфизм вычисления. Алгебра \mathcal{A} , состоящая из функций $U \rightarrow \mathbb{K}$, заданных на каком-нибудь подмножестве $U \subset \mathbb{K}$, содержащем все корни многочлена (9-13), называется *алгебраически вычислимой* на операторе F , если $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ и для каждого корня λ кратности k многочлена (9-13) все функции $f \in \mathcal{A}$ определены в точке $\lambda \in \mathbb{K}$ вместе с первыми $k - 1$ производными $f^{(v)} = \frac{d^v f}{dt^v}$ и допускают тейлоровское разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t - \lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(t - \lambda)^{k-1} + g_\lambda(t) \cdot (t - \lambda)^k, \quad (9-15)$$

¹Т. е. подмодулей $(t - \lambda)$ -кручения, см. п° 9.1.6 на стр. 147.

²Т. е. максимальному из показателей степеней элементарных делителей вида $(t - \lambda)^m$ оператора F .

где функция $g_\lambda(t)$ тоже лежит в алгебре \mathcal{A} .

Например, алгебра \mathcal{A} всех функций, определённых в ε -окрестности каждого собственного числа $\lambda \in \text{Spec } F$ и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от $(t - \lambda)$, алгебраически вычислима на операторе F . Подалгебра в \mathcal{A} , состоящая из всех аналитических функций¹ $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, алгебраически вычислима на всех операторах $F \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$.

ТЕОРЕМА 9.4

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе $F : V \rightarrow V$ алгебра функций \mathcal{A} допускает единственный такой гомоморфизм \mathbb{K} -алгебр $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$, что $\text{ev}_F(p) = p(F)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$.

Доказательство **ТЕОР. 9.4.** Пусть оператор F аннулируется многочленом (9-13), и пусть искомым гомоморфизм $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ существует. Пространство V является прямой суммой F -инвариантных корневых подпространств $K_\lambda = \ker(F - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$. Согласно формуле (9-15) оператор

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!} (F - \lambda E)^{m_\lambda-1} + g_\lambda(F)(F - \lambda E)^{m_\lambda} \quad (9-16)$$

действует на каждом подпространстве K_λ точно так же, как результат подстановки оператора F в многочлен $j_\lambda^{m_\lambda-1} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda) \cdot (t - \lambda) + \dots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda) \cdot (t - \lambda)^{m_\lambda-1} / (m_\lambda - 1)!$. Класс этого многочлена в факторкольце $\mathbb{K}[t]/((t - \lambda)^{m_\lambda})$ называется $(m_\lambda - 1)$ -струей функции $f \in \mathcal{A}$ в точке $\lambda \in \mathbb{K}$. По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени, строго меньшей $\deg \alpha(t)$, что $p_{f(F)}(t) \equiv j_\lambda^{m_\lambda-1} f(t) \pmod{\alpha(t)}$ сразу для всех корней λ многочлена α . Поскольку операторы $p_{f(F)}(F)$ и $f(F)$ одинаково действуют на каждом подпространстве K_λ , имеет место равенство $f(F) = p_{f(F)}(F)$. Таким образом, гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ действительно является гомоморфизмом \mathbb{K} -алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$J : \mathcal{A} \rightarrow \frac{\mathbb{K}[t]}{((t - \lambda_1)^{m_1})} \times \dots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{((t - \lambda_r)^{m_r})} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)}, \quad (9-17)$$

$$f \mapsto \left(j_{\lambda_1}^{m_1-1} f, \dots, j_{\lambda_s}^{m_s-1} f \right),$$

сопоставляющее функции $f \in \mathcal{A}$ набор её струй² во всех корнях многочлена α , является гомоморфизмом \mathbb{K} -алгебр, т. е. \mathbb{K} -линейно и удовлетворяет равенству $J(fg) = J(f)J(g)$. Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи j_λ^{m-1} отдельно. Используя правило Лейбница: $(fg)^{(k)} = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} f^{(v)} g^{(k-v)}$, получаем следующие равенства по модулю $(t - \lambda)^m$:

$$\begin{aligned} j_\lambda^{m-1}(fg) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - \lambda)^k}{k!} \sum_{v+\mu=k} \frac{k!}{v!\mu!} f^{(v)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v+\mu=k} \frac{f^{(v)}(\lambda)}{v!} (t - \lambda)^v \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!} (t - \lambda)^\mu \equiv j_\lambda^{m-1}(f) j_\lambda^{m-1}(g). \end{aligned}$$

¹Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в \mathbb{K} степенными рядами.

²Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно факторкольцу $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$.

Отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ является композицией гомоморфизма (9-17) с гомоморфизмом вычисления многочленов $ev_F : \mathbb{K}[t] \rightarrow \text{End } V$, $p \mapsto p(F)$, который корректно пропускается через фактор $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$, так как $\alpha(F) = 0$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1 (ГОМОМОРФИЗМ ВЫЧИСЛЕНИЯ)

Гомоморфизм $ev_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$ из теор. 9.4 называется *вычислением функций* $f \in \mathcal{A}$ на операторе F . Линейный оператор $ev_F(f) : V \rightarrow V$, в который переходит функция $f \in \mathcal{A}$ при гомоморфизме вычисления, обозначается $f(F)$ и называется *функцией f от оператора F* .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. (КАК ОТНОСИТЬСЯ К ФУНКЦИЯМ ОТ ОПЕРАТОРОВ) Из теор. 9.4 вытекает, что если характеристический многочлен линейного оператора $F : V \rightarrow V$ полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, то на пространстве V определены такие линейные операторы, как e^F или $\sin F$, а если $F \in \text{GL}(V)$, то и такие задаваемые аналитическими вне нуля функциями операторы, как $\ln F$ или \sqrt{F} , причём алгебраические свойства всех этих операторов точно такие же, как у числовых функций e^t , $\sin t$, $\ln t$ и \sqrt{t} . В частности, все эти функции от оператора F коммутируют друг с другом и с F , а также удовлетворяют соотношениям вроде $\ln F^2 = 2 \ln F$ и $\sqrt{F} \sqrt{F} = F$. Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, удовлетворяющих заданному алгебраическому или дифференциальному уравнению, в частности, для извлечения корней из невырожденных операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5

В условиях теор. 9.4 на стр. 160 для любой функции f из алгебраически вычислимой на операторе F алгебры функций \mathcal{A} спектр оператора $f(F)$ состоит из чисел $f(\lambda)$, где $\lambda \in \text{Spec } F$. Если $f'(\lambda) \neq 0$, то элементарные делители $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}l(F)$ биективно соответствуют элементарным делителям $(t - f(\lambda))^m \in \mathcal{E}l(f(F))$. Если $f'(\lambda) = 0$, то каждому элементарному делителю $(t - \lambda)^m$ с $m > 1$ из $\mathcal{E}l(F)$ в множестве $\mathcal{E}l(f(F))$ соответствует объединение нескольких элементарных делителей вида $(t - f(\lambda))^{\ell_i}$ с $\ell_i \in \mathbb{N}$ и $\sum_i \ell_i = m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Реализуем F как оператор умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец $V = \mathbb{K}[t]/((t - \lambda_1)^{s_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[t]/((t - \lambda_r)^{s_r})$. Как мы видели в доказательстве теор. 9.4 ограничение оператора $f(F)$ на корневое подпространство K_λ раскладывается в сумму скалярного оператора $f(\lambda)E$ и нильпотентного оператора $N = f'(\lambda) \cdot \eta + \frac{1}{2} f''(\lambda) \cdot \eta^2 + \dots$, где $\eta : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ обозначает оператор умножения на класс $[t - \lambda]$. На каждом слагаемом $\mathbb{K}[t]/((t - \lambda)^m)$ оператор η имеет ровно одну жорданову цепочку максимальной длины m . Если $f'(\lambda) \neq 0$, то

$$N^{m-1} = f'(\lambda)^{m-1} \cdot \eta^{m-1} \neq 0.$$

Поэтому N тоже имеет ровно одну жорданову цепочку длины m . При $f'(\lambda) = 0$ и $m > 1$ равенство $N^k = 0$ наступит при $k < m$. Поэтому цикловой тип ограничения оператора N на каждое слагаемое вида $\mathbb{K}[t]/((t - \lambda)^m)$ состоит из нескольких цепочек суммарной длины m . \square

УПРАЖНЕНИЕ 9.18. Покажите, что матрица $J_n^{-1}(\lambda)$, обратная к жордановой клетке размера $n \times n$ с собственным числом λ , подобна матрице $J_n(\lambda^{-1})$.

9.3.2. Интерполяционный многочлен. Многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$, принимающий на операторе F то же самое значение, что и функция $f \in \mathcal{A}$, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления $f(F)$. Он однозначно определяется тем, что его степень строго меньше степени аннулирующего оператор f многочлена α и в каждом корне кратности m многочлена α сам многочлен $p_{f(F)}$ и первые его $m - 1$ производные принимают те же значения, что функция f и её первые $m - 1$ производные. Таким образом, при $\deg \alpha = d$ отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена $p_{f(F)}$ сводится к решению системы из d линейных уравнений на d неизвестных.

Лемма 9.2 (Об интерполяции с кратными узлами¹)

Для любых различных чисел a_1, \dots, a_n из любого поля \mathbb{K} и произвольно заданного для каждого a_i набора из m_i значений $b_{i,0}, b_{i,1}, \dots, b_{i,m_i-1} \in \mathbb{K}$ существует единственный такой многочлен $g \in \mathbb{K}[x]$ степени строго меньше $m = m_1 + \dots + m_n$, что при каждом $i = 1, \dots, n$ сам этот многочлен и первые его $m_i - 1$ производные принимают в точке a_i заданные значения

$$g(a_i) = b_{i,0}, g'(a_i) = b_{i,1}, \dots, g^{(m_i-1)}(a_i) = b_{i,m_i-1},$$

где $g^{(k)}(x) = d^k g(x) / dx^k$ означает k -тую производную многочлена g .

Доказательство. Введём на m парах чисел (i, j) , где $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j < m_i$, какой-нибудь линейный порядок и рассмотрим отображение $F : \mathbb{K}[x]_{< m} \rightarrow \mathbb{K}^m$, переводящее каждый многочлен g степени меньше m в набор значений² $g^{(j)}(a_i)$, записанных в одну строку в выбранном на парах (i, j) порядке.

Упражнение 9.19. Убедитесь, что отображение F линейно.

Если $g \in \ker F$, то по предл. 2.6 на стр. 45 каждое число $a_i \in \mathbb{K}$ является как минимум m_i -кратным корнем многочлена g , т. е. g делится на $\prod_i (x - a_i)^{m_i}$, откуда $g = 0$, ибо степень произведения равна $m > \deg g$. Мы заключаем, что $\ker F = 0$. Поскольку $\dim \mathbb{K}[x]_{< m} = \dim \mathbb{K}^m$, отображение F биективно. \square

Пример 9.8 (Степенная функция и рекуррентные уравнения, ср. с прим. 3.6 на стр. 59)

Задача отыскания n -того члена a_n числовой последовательности $z : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$, $n \mapsto z_n$, решающей рекуррентное уравнение $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \dots + \alpha_m z_{n-m}$ с начальным условием $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, сводится вычислению n -той степени матрицы сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

смещающей каждый фрагмент из m последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}).$$

¹Это утверждение обобщает прим. 2.5 на стр. 43.

²Где для единообразия обозначений мы полагаем $g^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} g$.

Искомый элемент a_n при этом равен первой координате вектора

$$(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n.$$

Матрица $S^n = p_{S^n}(S)$ является результатом подстановки матрицы S в интерполяционный многочлен $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$ для вычисления на матрице S *степенной функции* $f(t) = t^n$. Обратите внимание, что $\deg p_{S^n} < m$, и коэффициенты многочлена p_{S^n} находятся решением системы из m линейных уравнений на m неизвестных.

Например, для уравнения Фибоначчи $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ матрица сдвига имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции t^n на этой матрице линеен. Записывая его в виде $p_{S^n}(t) = at + b$ с неопределёнными коэффициентами a и b , получаем

$$S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

Таким образом, n -тое число Фибоначчи, решающее уравнение Фибоначчи с начальным условием $(a_0, a_1) = (0, 1)$, равно первой координате вектора $(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$. Матрица S аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Функция t^n принимает на них значения λ_{\pm}^n . Коэффициенты a и b находятся из системы

$$\begin{cases} a\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\lambda_- + b = \lambda_-^n, \end{cases}$$

и по правилу Крамера $a = (\lambda_+^n - \lambda_-^n) / (\lambda_+ - \lambda_-)$. Тем самым,

$$a_n = a = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}},$$

что согласуется с [прим. 3.6](#) на стр. 59.

Пример 9.9 (квадратный корень из оператора)

Покажем, что если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто и $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2$, то из любого биективного линейного оператора F на конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{k} можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора F . В [прим. 3.8](#) на стр. 63 мы видели, что при всех целых $k \geq 0$ биномиальный коэффициент $\binom{2k}{k}$ нацело делится на $(k+1)$, и если $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2$, то корректно определён биномиальный степенной ряд¹

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \frac{x^k}{k}. \quad (9-18)$$

¹См. формулу (3-19) на стр. 63.

УПРАЖНЕНИЕ 9.20. Убедитесь в том, что квадрат многочлена, равного сумме первых $n + 1$ членов этого ряда, равен $1 + x$ в $\mathbb{k}[x]/(x^{n+1})$.

Если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, характеристический многочлен $\chi_F(t)$ оператора F разлагается на взаимно простые множители $(t - \lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda \in \text{Spec}(F)$, и пространство V является прямой суммой F -инвариантных корневых подпространств $K_\lambda = \ker(F - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$. Так как F биективен, все числа λ в этом разложении отличны от нуля. Для каждого $\lambda \in \text{Spec}(F)$ обозначим через $p_\lambda(t) \in \mathbb{k}[t]$ сумму первых m_λ членов формального разложения Тэйлора функции \sqrt{t} в точке λ , которое получается из (9-18) заменой переменных:

$$\sqrt{t} = \sqrt{\lambda + (t - \lambda)} = \sqrt{\lambda} \cdot (1 + (t - \lambda)/\lambda)^{1/2} = \lambda^{1/2} + \frac{t - \lambda}{2\lambda^{1/2}} - \frac{(t - \lambda)^2}{8\lambda^{3/2}} + \frac{(t - \lambda)^3}{16\lambda^{5/2}} - \dots$$

Тогда $p_\lambda^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$ в силу упр. 9.20. По китайской теореме об остатках существует многочлен $p(t)$, сравнимый с $p_\lambda(t)$ по модулю $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \text{Spec}(F)$. Он имеет $p^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$ для всех $\lambda \in \text{Spec}(F)$. Поскольку квадрат оператора $p(F)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ точно также, как F , мы заключаем, что $p^2(F) = F$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. (АНАЛИТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРА) Гомоморфизм вычисления значений многочленов на матрице $F \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ можно продолжать на бóльшие алгебры функций $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$ средствами анализа: наделим пространства \mathcal{C} и $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ той или иной топологией, представим функцию $f \in \mathcal{C}$ в виде предела $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ какой-нибудь последовательности многочленов f_k и положим матрицу $f(F)$ равной пределу последовательности матриц $f_k(F) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Разумеется, при этом необходимо проверять, что предел $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(F)$ существует и зависит только от функции f , а не от выбора сходящейся к f последовательности многочленов, и отдельно следует убедиться в том, что полученное таким образом отображение $\text{ev}_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C}), f \mapsto f(F)$, является гомоморфизмом алгебр¹. Но если это так, и если переход к пределу в пространстве матриц перестановочен со сложением и умножением на константы², то как бы ни определялась сходимост в пространстве функций и какой бы ни была сходящаяся к функции f последовательность многочленов f_k , последовательность матриц $f_k(F)$ будет лежать в конечномерном векторном пространстве, порождённом над \mathbb{C} степенями F^m с $0 \leq m < n$, т. е. её предел *a priori* будет многочленом от F степени, строго меньшей n , а значит, может быть вычислен при помощи подходящего интерполяционного многочлена. Если матрицы F и G подобны, т. е. $G = CFC^{-1}$ для некоторой матрицы $C \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$, то аналитически определённые функции от этих матриц тоже будут подобны: так как равенство $f_k(G) = Cf_k(F)C^{-1}$ справедливо для всех многочленов, приближающих функцию f , оно выполняется и для предельной функции в силу непрерывности линейного отображения $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C}), X \mapsto CXC^{-1}$.

9.4. Перестановочные операторы и разложение Жордана. Если линейные операторы F и G на векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} коммутируют друг с другом, то ядро

¹Иначе не вполне понятно, зачем оно нужно. В качестве упражнения по анализу читателю настоятельно рекомендуется попробовать самостоятельно реализовать намеченную программу, используя на пространстве функций топологию, в которой сходимост последовательности функций означает равномерную сходимост в каждом круге в \mathbb{C} , а на пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ — стандартную топологию пространства \mathbb{C}^{n^2} , где сходимост определяется покоординатно.

²Т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda F_k + \mu G_k) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} F_k + \mu \lim_{k \rightarrow \infty} G_k$. Это означает, в частности, что все \mathbb{C} -линейные отображения $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ непрерывны.

и образ любого многочлена от оператора F переводятся оператором G в себя:

$$\begin{aligned} f(F)v = 0 &\Rightarrow f(F)Gv = Gf(F)v = 0 \\ v = f(F)w &\Rightarrow Gv = Gf(F)w = f(F)Gw. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$ инвариантны относительно любого перестановочного с F оператора G .

Предложение 9.6

В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем \mathbb{k} любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов на V можно одновременно диагонализировать в некотором общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V = 1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескаларный оператор F , то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем V , а в диагонализуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F тоже диагонализуемы по сл. 9.8. Применяя к собственному подпространству (соответственно ко всем собственным подпространствам) оператора F предположение индукции, получаем требуемое. \square

Пример 9.10 (конечные группы операторов)

Если m линейных операторов на конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \nmid m$ образуют группу G , то каждый из этих операторов аннулируется многочленом $t^m - 1$, который раскладывается в произведение m попарно различных линейных множителей¹. Поэтому каждый оператор в группе G диагонализуем. Все операторы из группы G одновременно диагонализуются в одном общем базисе, если и только если группа G абелева.

Теорема 9.5 (разложение Жордана)

Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} существует единственная пара таких операторов F_d и F_n , что F_n нильпотентен, F_d диагонализуем, $F_d F_n = F_n F_d$ и $F = F_d + F_n$. Эти единственные операторы F_d и F_n являются многочленами без свободных членов от оператора F .

Доказательство. Пусть $\text{Spec } F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. В силу алгебраической замкнутости поля \mathbb{k} , характеристический многочлен $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$ полностью разлагается на линейные множители, и пространство $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$ является прямой суммой корневых подпространств $K_\lambda = \ker(F - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$. В качестве диагонализуемого оператора F_d можно взять оператор, действующий на каждом корневом подпространстве K_λ умножением на λ , а в качестве нильпотентного

¹Поскольку производная mt^{m-1} многочлена $t^m - 1$ отлична от нуля и взаимно проста с ним.

оператора F_n — разность $F_n = F - F_d$, которая действует на каждом корневом подпространстве K_λ нильпотентным оператором $F - \lambda \text{Id}$.

Покажем, что оба эти оператора являются многочленами без свободного члена от F . Для этого достаточно представить в таком виде оператор F_d . Для каждого ненулевого $\lambda \in \text{Spec } F$ обозначим через $g_\lambda \in \mathbb{k}[x]$ многочлен, представляющий класс λ/t в $\mathbb{k}[x]/((t - \lambda)^{m_\lambda})$, а для $\lambda = 0$ положим $g_\lambda(t) = 0$. По китайской теореме об остатках существует многочлен $g \in \mathbb{k}[x]$, сравнимый с g_λ по модулю $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \text{Spec } F$. Многочлен tg_λ не имеет свободного члена, и его класс в $\mathbb{k}[x]/((t - \lambda)^{m_\lambda})$ равен классу λ для всех $\lambda \in \text{Spec } F$. Поэтому оператор $g(F)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ как умножение на λ , т. е. совпадает с F_d .

Будучи многочленами от F , операторы F_d и $F_n = F - F_d$ перестановочны между собою и с F . Это доказывает существование операторов F_d и F_n с требуемыми свойствами, включающими в себя и последнее утверждение предложения. Докажем их единственность.

Пусть есть ещё одно разложение $F = F'_d + F'_n$, в котором F'_d диагонализуем, F'_n нильпотентен и $F'_d F'_n = F'_n F'_d$. Из последнего равенства вытекает, что F'_d и F'_n перестановочны с любым многочленом от $F = F'_d + F'_n$, в частности, с построенными выше F_d и F_n . Поэтому каждое собственное подпространство V_λ оператора F_d переводится оператором F'_d в себя¹, причём F'_d диагонализуем² на каждом V_λ . Если бы оператор F'_d имел на V_λ собственный вектор с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то этот вектор был бы собственным для оператора $F_n - F'_n = F_d - F'_d$ с собственным значением $\lambda - \mu \neq 0$, что невозможно, так как оператор $F_n - F'_n$ нильпотентен.

УПРАЖНЕНИЕ 9.21. Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор F'_d действует на каждом собственном подпространстве V_λ оператора F_d как умножение на λ , откуда $F'_d = F_d$. Тогда и $F'_n = F - F'_d = F - F_d = F_n$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2

Операторы F_d и F_n из теор. 9.5 называются, соответственно, *диагонализуемой* и *нильпотентной* составляющими оператора F .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3. Поскольку операторы F_d и F_n являются многочленами от F , каждое F -инвариантное подпространство $U \subset V$ является инвариантным для F_d и F_n .

¹См. п.° 9.4 на стр. 164.

²См. сл. 9.8 на стр. 157.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 9.1. Если отождествить $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ с полем \mathbb{C} , отправив классы $[1]$ и $[t]$ в 1 и i соответственно, умножение на класс $[t]$ превратится в умножение на i , т. е. в поворот на угол $\pi/2$, который не переводит никакое одномерное векторное подпространство в себя.
- Упр. 9.2. Пусть $\mathbb{k}[t]/(t^n) = U \oplus W$, где U и W переводятся в себя умножением на $[t]$. Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на $[t]$, так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет U , имеется класс $[g]$ многочлена g с ненулевым свободным членом. Тогда классы $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$ выражаются через базис $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$ пространства $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонали которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена g . Следовательно, эти классы тоже образуют базис в $\mathbb{k}[t]/(t^n)$, и значит, содержащее их подпространство U совпадает со всем пространством $\mathbb{k}[t]/(t^n)$.
- Упр. 9.3. Разложите каждое пространство $(F|_{U_i}, U_i)$ по форм. (9-1) на стр. 143. В силу единственности такого разложения прямая сумма полученных разложений является разложением исходного пространства (F, V) .
- Упр. 9.4. Коэффициенты $g_i \in \mathbb{k}^n$ неполного частного $g(t)$ от деления $h(t)$ на $tE - A$ вычисляются рекурсивно по формулам $g_{m-1} = h_m, g_{i-1} = h_i + Ag_i$ при $i \leq m - 1$. Остаток $r = h(t) - (tE - A)g(t) \in \mathbb{k}^n$ не зависит от t . Подставляя $t = A$, что законно, ибо A коммутирует¹, заключаем, что $r = h(A)$.
- Упр. 9.5. $\det(tE - C^{-1}AC) = \det(tC^{-1}EC - C^{-1}AC) = \det(C^{-1}(tE - A)C) = \det C^{-1} \cdot \det(tE - A) \cdot \det C = \det(tE - A)$.
- Упр. 9.6. Пусть $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$. Напишите матрицу F оператора умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{k}[x]/(f)$ в базисе $[t^{n-1}], [t^{n-2}], \dots, [t], [1]$ и разложите $\det(tE - F)$ по первому столбцу.
- Упр. 9.7. Пусть $f(t) = \mu_{v,F}(t)g(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_{v,F}$. Если $f(F)v = 0$, то $r(F)v = 0$, что невозможно для ненулевого r с $\deg r < \deg \mu_{v,F}$ по определению многочлена $\mu_{v,F}$. Поэтому $r = 0$.
- Упр. 9.8. Если оператор $q(F)$ аннулирует все векторы из какого-нибудь линейного порождающего V множества, то он аннулирует любой вектор из V .
- Упр. 9.12. Так как любой вектор $h \in H$ представляется в V как $h = u + q + r$ с $u \in U, q \in Q, r \in R$, в U выполняется равенство $h = \pi(h) = \pi(u) + \pi(r)$, в котором $\pi(u) = u \in U$ и $\pi(r) \in W$, т. е. $U + W = H$. Если $u \in U \cap W$, то $u = \pi(r)$ для некоторого $r \in R$, и $\pi(u - r) = \pi(u) - \pi(r) = u - u = 0$, откуда $u - r \in \ker \pi = Q$, что возможно только при $u = r = 0$. Поэтому $U \cap W = 0$.
- Упр. 9.13. Если $\lambda \in \text{Spec } F$ и $g(\lambda) \neq 0$, то $g(F)$ действует на ненулевом собственном подпространстве V_λ умножением на ненулевое число $g(\lambda)$. Тем самым, $g(F) \neq 0$.
- Упр. 9.14. Над алгебраически замкнутым полем всякий многочлен имеющий только один корень 0 равен t^m . Поэтому $\chi_F(t) = t^m$ и по теореме Гамильтона – Кэли $F^m = 0$.
- Упр. 9.17. Разложение характеристического многочлена оператора F в виде произведения степеней попарно разных линейных форм $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{N_\lambda}$ удовлетворяет условиям теор. 9.3 с $q_i = (t - \lambda)^{N_\lambda}$, а корневые подпространства $K_\lambda = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{N_\lambda}$.

¹См. упр. 8.13 на стр. 139.

Упр. 9.18. Над полем \mathbb{C} можно применить [предл. 9.5](#). Над произвольным полем \mathbb{k} оператор F с матрицей $J_n(\lambda)$ имеет вид $\lambda \text{Id} + N$, где $N^n = 0$, но $N^{n-1} \neq 0$. Обратный оператор

$$F^{-1} = (\lambda \text{Id} + N)^{-1} = \lambda^{-1}(\text{Id} + N/\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} - \lambda^{-2}N + \lambda^{-3}N^2 - \dots + (-1)^{n-1}\lambda^{-n}N^{n-1}$$

имеет вид $\lambda^{-1}\text{Id} + M$, где оператор $M = -\lambda^{-2}N(1 - \lambda^{-1}N + \dots)$ тоже имеет $M^n = 0$, а $M^{n-1} = \lambda^{2(1-n)}N^{n-1} \neq 0$. Таким образом, ЖНФ оператора F^{-1} это одна клетка $J_n(\lambda^{-1})$.

Упр. 9.20. В $\mathbb{k}[[x]]$ квадрат ряда $\sqrt{1+x}$ равен $1+x$, а коэффициенты при x^k для $0 \leq k \leq n$ у квадрата ряда $\sqrt{1+x}$ такие же, как и у квадрата многочлена из условия.

Упр. 9.21. Если $a^n = 0$, $b^m = 0$ и $ab = ba$, то $(a-b)^{m+n-1} = 0$ по формуле Ньютона.