## §14. Тензорная алгебра векторного пространства

Всюду в этом параграфе через $V$ обозначается векторное пространство над произвольным полем $\Bbbk$.

**14.1. Тензорные степени, свёртки и полилинейные формы.** Тензорное произведение $n$ экземпляров векторного пространства $V$ с самим собой $V^{\otimes n} = V \otimes \ldots \otimes V$ называется $n$-той *тензорной степенью* пространства $V$. Мы по определению полагаем $V^{\otimes 0} = \Bbbk$ и $V^{\otimes 1} = V$. Из универсального свойства тензорного произведения[1] вытекает, что двойственное к $V^{\otimes n}$ пространство $V^{\otimes n*}$ линейных функций $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ канонически изоморфно пространству $n$-линейных форм на $V$, т. е. отображений $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$, линейных по каждому из $n$ аргументов. С другой стороны, между пространствами $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n} = V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ имеется каноническое билинейное спаривание, сопоставляющее разложимым тензорам $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ их *полную свёртку*

$$\langle\, v\,,\,\xi\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{i=1}^{n} \langle\, v_i\,,\,\xi_i\,\rangle\,, \tag{14-1}$$

где $\langle\, v_i\,,\,\xi_i\,\rangle = \xi_i(v) = \mathrm{ev}_v(\xi) \in \Bbbk$ — результат вычисления ковектора $\xi_i$ на векторе $v_i$. Так как правая часть (14-1) полилинейна по всем $v_i$ и $\xi_i$, правило $v \mapsto \langle\, v\,,\,\xi\,\rangle$ при фиксированном $\xi$ корректно задаёт линейный функционал $V^{\otimes n} \to \Bbbk$, который полилинейно зависит от $\xi_i$. Сопоставляя разложимому тензору $\xi \in V^{*\otimes n}$ такой функционал, мы получаем корректно определённое линейное отображение

$$V^{*\otimes n} \to V^{\otimes n*}\,, \quad \xi \mapsto (v \mapsto \langle\,\xi\,,\,v\,\rangle)\,. \tag{14-2}$$

Предложение 14.1
Для конечномерного пространства $V$ линейное отображение (14-2) является изоморфизмом.

Доказательство. Выберем двойственные базисы $e_1, \ldots, e_n$ в $V$ и $x_1, \ldots, x_n$ в $V^*$ и рассмотрим в $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ соответствующие базисы из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_s}$. Из соотношений $\langle\, x_i\,,\,e_j\,\rangle = \delta_{ij}$ и формулы (14-1) очевидно, что это двойственные базисы. □

Следствие 14.1
Для конечномерного пространства $V$ пространство $V^{*\otimes n}$ канонически изоморфно пространству $n$-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$. При этом изоморфизме каждый разложимый тензор $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ переходит $n$-линейную форму $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n}\langle\,\xi_i\,,\,v_i\,\rangle$.

Доказательство. Это композиция изоморфизма (14-2) с упомянутым выше изоморфизмом пространства $V^{\otimes n*}$ с пространством $n$-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$, вытекающим из универсального свойства тензорного произведения[2]. □

**14.1.1. Частичные свёртки.** Фиксируем два инъективных, но не обязательно монотонных отображения $I : \{1, \ldots, m\} \hookrightarrow \{1, \ldots, p\}$ и $J : \{1, \ldots, m\} \hookrightarrow \{1, \ldots, q\}$, которые будем записывать последовательностями из $m$ не повторяющихся индексов $I = (i_1, \ldots, i_m)$ и $J = (j_1, \ldots, j_m)$,

[1] См. предл. 13.1 на стр. 212.

[2] Обратите внимание, что этот изоморфизм имеет место для любых, в том числе и бесконечномерных векторных пространств

где $i_\nu = I(\nu)$, $j_\nu = J(\nu)$. Линейный оператор $c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)}$, сворачивающий $i_\nu$-й сомножитель произведения $V^{*\otimes p}$ с $j_\nu$-м сомножителем произведения $V^{\otimes q}$ для каждого $\nu = 1, \dots, m$ и оставляющий все остальные сомножители в том же порядке:

$$(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_p) \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_q) \mapsto \left(\prod\nolimits_{\nu=1}^{m} \langle\, \xi_{i_\nu} \,,\, v_{j_\nu} \,\rangle\right) \cdot \left(\bigotimes\nolimits_{i\notin I} \xi_i\right) \otimes \left(\bigotimes\nolimits_{j\notin J} v_j\right), \quad (14\text{-}3)$$

называется *частичной свёрткой* по индексам $I$, $J$. Подчеркнём, что разные отображения $I$, $J$ обычно задают разные частичные свёртки.

Пример 14.1 (свертка вектора с полилинейной формой)
Интерпретируем $n$-линейную форму $\varphi : V\times\ldots\times V \to \Bbbk$ при помощи задаваемого полной свёрткой изоморфизма (14-2) как тензор $\varphi \in V^{*\otimes n}$ и свернём его по первому тензорному сомножителю с вектором $v \in V$. Получится тензор из $V^{*\otimes(n-1)}$, задающий $(n-1)$-линейную форму $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$, которая называется *внутренним произведением* вектора $v$ с полилинейной формой $\varphi$ и обозначается $i_v\varphi$ или $v\llcorner\varphi$. Покажем, что для всех $w_1, \dots, w_{n-1} \in V$

$$i_v\varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v,\, w_1, \dots, w_{n-1})\,.$$

Так как равенство линейно по $\varphi$, его достаточно проверить на линейно порождающих $V^{*\otimes n}$ разложимых тензорах $\varphi = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n \in V^{*\otimes n}$, а для них оно верно:

$$i_v\varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \langle\, \varphi_1 \,,\, v \,\rangle \cdot \prod\nolimits_{\nu\geqslant 2} \langle\, \varphi_\nu \,,\, w_\nu \,\rangle = \varphi(v,\, w_1, \dots, w_{n-1})\,.$$

**14.1.2. Линейный носитель тензора.** Пусть $t \in V^{\otimes n}$. Пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора $t$ и обозначается $\operatorname{supp} t \subset V$. Иначе носитель можно охарактеризовать как такое наименьшее и по включению, и по размерности подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Эквивалентность всех этих описаний вытекает из равенства $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n} = (U \cap W)^{\otimes n}$.

Упражнение 14.1. Докажите это равенство.

Размерность носителя называется *рангом* тензора и обозначается $\operatorname{rk} t \overset{\text{def}}{=} \dim \operatorname{supp} t$. Тензор $t$ называется *вырожденным*, если $\operatorname{rk} t < \dim V$. Это означает, что некоммутативный многочлен $t$ «зависит» от меньшего, чем $\dim V$, числа «переменных», и лишние переменные можно убрать подходящей линейной заменой координат. Например, если $\dim \operatorname{supp} t = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторых $c \in \Bbbk$ и $v \in V$.

Явно указать векторы, линейно порождающие $\operatorname{supp} t$ над $\Bbbk$ можно при помощи частичных свёрток. Для каждой последовательности $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$ из $n-1$ не повторяющихся индексов[1] $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$t_J : V^{*\otimes(n-1)} \to V\,, \quad \xi \mapsto c^{1,\dots,(n-1)}_{j_1,\dots,j_{n-1}}(\xi \otimes t)\,, \qquad (14\text{-}4)$$

полную свёртку с тензором $t$, которая спаривает $\nu$-й сомножитель произведения $V^{*\otimes(n-1)}$ с $j_\nu$-м сомножителем тензора $t$ для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Если записать $t$ в виде суммы разложимых тензоров вида $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов $v_i$ с $i \notin J$. Очевидно, что она лежит в $\operatorname{supp} t$.

[1] Ещё раз подчеркнём, что индексы не обязаны возрастать или убывать.

Теорема 14.1
Пространство $\operatorname{supp} t$ линейно порождается образами всех свёрток (14-4).

Доказательство. Обозначим $\operatorname{supp} t$ через $W \subset V$. Достаточно доказать, каждая линейная форма $\xi \in V^*$, аннулирующая образы всех свёрток (14-4), аннулирует подпространство $W$. Предположим противное: пусть ковектор $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на $W$, но аннулирует $t_J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$ для всех $J$. Выберем в $V^*$ базис $\xi_1, \dots, \xi_d$, в котором $\xi_1 = \xi$ и ограничения ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_k$ на $W$ образуют базис в $W^*$. Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ двойственный базис пространства $W$ и разложим $t$ по этому базису. Значение $\xi\left(t_J(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}})\right)$ равно полной свёртке тензора $t$ с базисным тензорным мономом $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$ по всем $n$ тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью[1] $J$. Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном[2] от базисных векторов $w_i$ входит в разложение $t$. Подбирая надлежащие $J$, можно получить коэффициент при любом содержащем $w_1$ мономе, входящем в разложение $t$. Тем самым, все они нулевые, т. е. $w_1 \notin \operatorname{supp} t$ вопреки нашему выбору. □

**14.2. Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры.** Тензорное умножение векторов задаёт на бесконечной прямой сумме $TV \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n}$ структуру ассоциативной некоммутативной градуированной[3] $\Bbbk$-алгебры. Она называется *тензорной* или *свободной ассоциативной* алгеброй векторного пространства $V$. Если зафиксировать в $V$ базис $E \subset V$, то по предл. 13.3 на стр. 213 моном $1 \in V^{\otimes 0}$ и всевозможные тензорные мономы

$$e_1 \otimes \dots \otimes e_m\,, \quad \text{где} \quad e_i \in E\,,\ m \in \mathbb{N}\,, \tag{14-5}$$

составят базис векторного пространства $TV$. Умножение мономов (14-5) заключается в приписывании их друг к другу через знак $\otimes$, моном 1 служит единицей. Таким образом, фиксация базиса $E$ в $V$ отождествляет алгебру $TV$ с алгеброй многочленов от не коммутативных переменных $e \in E$. Каждое прямое слагаемое $V^{\otimes n} \subset TV$ при этом отождествляется с пространством однородных многочленов степени $n$. Вложение векторного пространства $V$ в алгебру $V$ в качестве подпространства $V^{\otimes 1} \subset TV$ обозначается $\iota : V \hookrightarrow TV$ и обладает следующим универсальным свойством.

Предложение 14.2 (универсальное свойство тензорной алгебры)
Для любого линейного отображения $f : V \to A$ пространства $V$ в ассоциативную $\Bbbk$-алгебру $A$ существует единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\alpha : TV \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$. Другими словами, гомоморфизмы $\Bbbk$-алгебр $TV \to A$ находятся в канонической биекции с линейными отображениям $V \to A$.

Доказательство. Искомый гомоморфизм $\alpha$ должен переводить каждый разложимый тензор

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in TV$$

[1] Т. е. $j_\nu$-й сомножитель тензора $t$ сворачивается с $\xi_{i_\nu}$ при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся в $t$ сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ сворачивается с $\xi_1$.

[2] $j_\nu$-й множитель этого монома равен $w_{i_\nu}$ при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ равен $w_1$.

[3] Алгебра $A$ над коммутативным кольцом $K$ называется *градуированной*, если она является прямой суммой $K$-модулей $A = \bigoplus_{n\geqslant 0} A_n$ и для всех $k, m$ произведение $A_k A_m \subset A_{k+m}$.

в произведение $f(v_1)\dots f(v_n) \in A$. Так как это произведение линейно по каждому $v_i$, отображения $\alpha_n : v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f(v_1)\dots f(v_n)$ корректно задают линейное отображение $\alpha : TV \to A$ переводящее конечную сумму $\sum_k t_k$ однородных тензоров $t_k \in V^{\otimes k}$ в сумму $\sum_k \alpha_k(t_k) \in A$, где $\alpha_0 : V^0 \to A$ переводит единицу в единицу. □

Упражнение 14.2. Убедитесь, что $\Bbbk$-алгебра $TV$ вместе с вложением $\iota : V \hookrightarrow TV$ определяются своим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма $\Bbbk$-алгебр, перестановочного с вложением $\iota$.

**14.2.1. Идеалы в некоммутативном кольце.** В некоммутативном кольце $R$ бывают идеалы трёх типов. Подкольцо $I \subset R$ называется *левым идеалом*, если $xa \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Симметричным образом, $I \subset R$ называется *правым идеалом*, если $ax \in I$ при любых $a \in I$ и $x \in R$. Идеал $I \subset R$ называется *двусторонним*, если он одновременно и левый, и правый. Иначе двусторонние идеалы можно охарактеризовать как ядра гомоморфизмов (некоммутативных) колец. Действительно, если элемент $a \in R$ аннулируется гомоморфизмом $\varphi : R \to S$, то для любых $x, y \in R$ выполняется равенство $\varphi(xay) = \varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = 0$. Наоборот, если аддитивная подгруппа $I \subset R$ является двусторонним идеалом, то правило $[a][b] \stackrel{\text{def}}{=} [ab]$ корректно задаёт на аддитивной абелевой фактор группе[1] $R/I$ умножение, ибо для любых $x, y \in I$

$$(a + x)(b + y) = ab + (ay + xb + xy) \equiv ab \pmod{I}$$

(обратите внимание, что для одностороннего идеала последнее сравнение может не имеет места). Относительно такого умножения фактор $R/I$ становится кольцом, а аддитивный гомоморфизм фактризации $R \twoheadrightarrow R/I$ — гомоморфизмом колец с ядром $I$.

Из теоремы о строении гомоморфизма групп[2] вытекает, что каждый гомоморфизм колец $\varphi : R \to S$ является композицией эпиморфизма факторизации $R \twoheadrightarrow R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$ и вложения $R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi \hookrightarrow S$.

Алгебры обычных и грассмановых многочленов являются факторами тензорной алгебры по двусторонним идеалам, порождённым соотношениями *коммутирования* и *антикоммутирования*.

**14.2.2. Симметрическая алгебра.** Обозначим через $\mathcal{I}_{\text{com}} \subset TV$ двусторонний идеал, порождённый всевозможными разностями $u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V$, где $u, w \in V$. Он состоит из конечных линейных комбинаций тензоров, которые можно получить умножая эти разности слева и справа на любые элементы из $TV$ и является прямой сумой однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\text{com}} = \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 2} (\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}),$$

где каждое пересечение $\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается разностями вида

$$(\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots) - (\dots \otimes w \otimes v \otimes \dots), \tag{14-6}$$

и обозначенные многоточиями соответственные фрагменты произведений одинаковы. Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{com}}$ называется *симметрической* или *свободной коммутативной* алгеброй пространства $V$. Умножение, индуцированное в ней тензорным произведением векторов, называется *коммутативным умножением* и обозначается точкой, которую, как правило, опускают.

[1]См. опр. 10.2 на стр. 185.
[2]См. сл. 10.4 на стр. 185.

Как векторное пространство симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент: $SV = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^nV$, где $S^nV \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n})$. Пространство $S^nV$ называется *n-й симметрической степенью* пространства $V$ и по построению порождается коммутативными произведениями $v_1 \dots v_n$, где $v_i \in V$. Обратите внимание, что $S^0V = \Bbbk$ и $S^1V = V$. Включение пространства $V$ в алгебру $SV$ в качестве прямого слагаемого $S^1V$ обозначается $\iota : V \hookrightarrow SV$ и обладает универсальным свойством, аналогичным предл. 14.2.

Упражнение 14.3 (универсальное свойство алгебры $SV$). Убедитесь, что для любого линейного отображения $f : V \to C$ пространства $V$ в произвольную коммутативную $\Bbbk$-алгебру $C$ имеется единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\tilde{f} : SV \to C$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём вложение $\iota : V \hookrightarrow SV$ определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с $\iota$ изоморфизма $\Bbbk$-алгебр.

Для любого базиса $E \subset V$ алгебра $\Bbbk[E]$ многочленов от переменных $e \in E$ и вложение $V \hookrightarrow \Bbbk[E]$ в качестве подпространства многочленов степени 1 тоже обладает универсальным свойством из упр. 14.3.

Упражнение 14.4. Убедитесь, что для любой коммутативной алгебры $C$ имеется каноническая биекция между отображениями множеств $E \to C$ и гомоморфизмами $\Bbbk$-алгебр $\Bbbk[E] \to C$.

Мы заключаем, что для каждого базиса $E \subset V$ существует единственный изоморфизм алгебр $\Bbbk[E] \xrightarrow{\sim} SV$, переводящий каждый базисный моном $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k} \in \Bbbk[E]$ в коммутативное произведение $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k} \in TV$ соответствующих базисных векторов пространства $V$ в тензорной алгебре $TV$. В частности, такие произведения составляют базис симметрической алгебры как векторного пространства над полем $\Bbbk$.

Упражнение 14.5. Найдите $\dim S^nV$, если $\dim V = d$.

Пример 14.2 (полиномиальные функции на пространстве $V$)
В силу универсального свойства симметрической алгебры, задаваемое каждым вектором $v \in V$ отображение вычисления на нём линейных форм $\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk$, $\varphi \mapsto \varphi(v)$, однозначно продолжается до гомоморфизма коммутативных $\Bbbk$-алгебр $\mathrm{ev}_v : SV^* \to \Bbbk$, переводящего разложимый полином $\varphi_1 \dots \varphi_n \in S^nV^*$, где $\varphi_i \in V^*$, в $\prod_i \varphi_i(v)$. Если выбрать в $V$ и $V^*$ двойственные базисы $e_1, \dots , e_d$ и $x_1, \dots , x_d$, что позволит записывать элементы $f \in SV^*$ как многочлены $f(x_1, \dots , x_n)$, а векторы $v \in V$ как строки их координат, то результат вычисления $\mathrm{ev}_v(f)$ многочлена $f$ на векторе $v$ равен числу, получающемуся подстановкой в $f$ вместо переменных значений координат вектора $v$. По этой причине симметрическую алгебру $SV^*$ называют *алгеброй многочленов* на пространстве $V$.

Пример 14.3 (симметричные полилинейные отображения)
Полилинейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \to W$ называется *симметричным*, если

$$\varphi(v_{g_1}, \dots , v_{g_n}) = \varphi(v_1, \dots , v_n)$$

для всех перестановок $(g_1, \dots , g_n) \in S_n$. В силу универсального свойства тензорного произведения, каждое полилинейное отображение $f$ единственным образом раскладывается в композицию тензорного умножения $\tau : V \times \dots \times V \to V^{\otimes n}$ и линейного отображения

$$\widetilde{\varphi} : V^{\otimes n} \to W\,, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \varphi(v_1, \dots , v_n)\,.$$

Если отображение $\varphi$ симметрично, то все линейно порождающие пространство $\mathcal{I}_{\mathrm{com}} \cap V^{\otimes n}$ разности (14-6) лежат в $\ker \widetilde{\varphi}$, поскольку

$$\widetilde{\varphi}(\,\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots - \dots \otimes w \otimes v \otimes \dots) = \varphi(\dots, v, w, \dots) - \varphi(\dots, w, v, \dots) = 0\,.$$

Тем самым, $\widetilde{\varphi}$ корректно факторизуется до линейного отображения

$$\widetilde{\varphi}:\; S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\mathrm{com}} \cap V^{\otimes n}) \to W\,.$$

Мы заключаем, что коммутативное умножение векторов $\sigma:\; V \times \dots \times V \to S^n V$ является универсальным симметричным полилинейным отображением в том смысле, что каждое симметричное полилинейное отображение $\varphi:\; V \times \dots \times V \to W$ единственным способом раскладывается в композицию $\varphi = \widetilde{\varphi}\sigma$, где $\widetilde{\varphi}:\; S^n V \to W$ линейно.

Упражнение 14.6. Покажите, что коммутативное умножение векторов определяется этим свойством однозначно с точностью до единственного линейного изоморфизма, перестановочного с коммутативным умножением векторов.

Следствие 14.2
Пространство симметричных $n$-линейных форм $V \times \dots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно пространству $S^n V$ для любого[1] векторного пространства $V$. □

**14.2.3. Внешняя алгебра.** Обозначим через $\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \subset TV$ двусторонний идеал, порождённый квадратами $v \otimes v \in V \otimes V$ всевозможных векторов $v \in V$. Он является прямой суммой

$$\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} = \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 2} \mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n}\,,$$

своих однородных компонент $\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n}$, которые линейно порождаются разложимыми тензорами вида $u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes v \otimes v \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m$ и в частности содержат все суммы

$$(\dots \otimes u \otimes w \otimes \dots) + (\dots \otimes w \otimes u \otimes \dots)\,, \tag{14-7}$$

а также все разложимые тензоры вида $\dots v \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_\ell \otimes v \otimes \dots$, у которых совпадающие сомножители $v$ не обязательно стоят рядом.

Упражнение 14.7. Убедитесь в этом и в том, что суммы (14-7) линейно порождают $\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n}$, если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$.

Фактор алгебра $\Lambda V \overset{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\mathrm{sk}}$ называется *внешней* или *грассмановой* алгеброй пространства $V$. Умножение в $\Lambda V$, индуцированное тензорным произведением в $TV$, называется *внешним* или *грассмановым* умножением и обозначается знаком $\wedge$. Как векторное пространство, внешняя алгебра является прямой суммой $\Lambda V = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Lambda^n V$ своих однородных компонент

$$\Lambda^0 V = \Bbbk\,, \quad \Lambda^1 V = V \quad \text{и} \quad \Lambda^n V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n})\,,$$

которые называются *внешними степенями* пространства $V$. По построению, $\Lambda^n V$ линейно порождается произведениями $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, где $v_i \in V$, и эти произведения кососимметричны:

$$v \wedge v = 0 \quad \text{и} \quad v_{g_1} \wedge \dots \wedge v_{g_n} = \operatorname{sgn}(g) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n$$

[1] В том числе бесконечномерного.

для любых векторов $v, v_1, \dots, v_n \in V$ и перестановок $g = (g_1, \dots, g_n) \in S_n$. Для произвольных[1] однородных $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^m V$ выполняется равенство

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega .$$

Градуированные алгебры с таким свойством называются *s-коммутативными*[2], а алгебра $\Lambda V$ иначе называется *свободной* s-коммутативной градуированной $\Bbbk$-алгеброй, порождённой векторным пространством $V$.

Пример 14.4 (кососимметричные полилинейные отображения, ср. с прим. 14.3)
Полилинейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \to W$ называется *кососимметричным*, если оно зануляется всякий раз, когда какие-нибудь два его аргумента совпадают, т. е. при любом $v \in V$

$$\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0 ,$$

где на обозначенных многоточиями местах может стоять всё, что угодно.

Упражнение 14.8. Убедитесь, что в этом случае $\varphi(v_{g_1}, \dots, v_{g_n}) = \mathrm{sgn}(g)\varphi(v_1, \dots, v_n)$ для любых $v_i \in V$ и $g \in S_n$ и что для кососимметричности полилинейного отображения достаточно, чтобы оно занулялось при совпадении любых двух соседних аргументов.

Точно также, как в прим. 14.3 на стр. 226, из универсального свойства тензорного произведения и кососимметричности отображения $\varphi$ вытекает, что $f$ единственным образом раскладывается в композицию тензорного умножения $\tau : V \times \dots \times V \to V^{\otimes n}$ и линейного отображения

$$\widetilde{\varphi} : V^{\otimes n} \to W , \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_n) .$$

которое зануляется на тензорах вида $u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes v \otimes v \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m$ и тем самым корректно факторизуется до линейного отображения $\widetilde{\varphi} : \Lambda^n V \to W$. Иными словами, грассманово умножение векторов $\sigma : V \times \dots \times V \to S^n V$ является универсальным кососимметричным полилинейным отображением в том смысле, что каждое кососимметричное полилинейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \to W$ единственным способом раскладывается в композицию $\varphi = \widetilde{\varphi}\sigma$, где $\widetilde{\varphi} : S^n V \to W$ линейно.

Упражнение 14.9. Покажите, что грассманово умножение векторов определяется этим свойством однозначно с точностью до единственного линейного изоморфизма, перестановочного с грассмановым умножением.

Следствие 14.3
Пространство кососимметричных $n$-линейных форм $V \times \dots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно пространству $\Lambda^n V$ для любого[3] векторного пространства $V$. □

Предложение 14.3
Для любого базиса $E \subset V$ отображение $\beta : \Bbbk\langle E \rangle \to \Lambda V$ из алгебры грассмановых многочленов[4] от переменных $e \in E$ во внешнюю алгебру пространства $V$, переводящее каждый базисный грассманов моном $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Bbbk\langle E \rangle$ в грассманово произведение $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda V$ соответствующих базисных векторов пространства $V$ во внешней алгебре $\Lambda V$, является изоморфизмом $\Bbbk$-алгебр.

[1] Не обязательно разложимых в грассманово произведение векторов.
[2] Префикс «s» можно по желанию воспринимать как аббревиатуру для *super* или для *skew*.
[3] В том числе бесконечномерного.
[4] См. n° 8.3 на стр. 132.

Доказательство. Обратное отображение $\Lambda V \to \Bbbk\langle E\rangle$ переводит каждое грассманово произведение векторов $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda^n$ в грассманов многочлен $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Bbbk\langle E\rangle$, который является произведением в алгебре $\Bbbk\langle E\rangle$ этих векторов, рассматриваемых как однородные грассмановы многочлены степени 1 от переменных $e \in E$. Поскольку последнее произведение полилинейно и кососимметрично по векторам $v_i \in V$, это правило корректно задаёт линейное отображение из $\Lambda^n V$ в пространство однородных грассмановых многочленов степени $n$ от переменных $e \in E$, и это отображение переводит вычисленные в $\Lambda V$ грассмановы произведения базисных векторов в базисные грассмановы мономы алгебры $\Bbbk\langle E\rangle$. □

Следствие 14.4
Пусть линейно упорядоченное множество векторов $E \subset V$ является базисом пространства $V$. Тогда грассмановы мономы $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где $e_1 < e_2 < \ldots < e_n$ и все $e_i \in E$, образуют базис внешней алгебры $\Lambda V$. □

Пример 14.5 (грассмановы квадратичные формы)
Покажем, что на конечномерном пространстве $V$ над любым полем $\Bbbk$ каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ в подходящем базисе $e_1, \ldots, e_d$ пространства $V$ записывается в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}\,. \tag{14-8}$$

Рассмотрим произвольный базис $u_1, \ldots, u_d$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \ldots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2)\,,$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$. Перейдём к новому базису $v_1, \ldots, v_d$, в котором $v_2 = \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$, а остальные $v_i = u_i$ при $i \neq 2$.

Упражнение 14.10. Убедитесь, что это действительно базис.

Получим выражение вида

$$\begin{aligned} \omega = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \ldots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ = (v_1 - \gamma_3 v_3 - \ldots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \ldots, \gamma_n \in \Bbbk$. Переходя к базису из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \ldots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Предложение 14.4
Если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в $V$ такой базис $e_1, \ldots, e_d$, что $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots$, как в прим. 14.5 выше. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с коэффициентом 2. Мы заключаем, что при $2 \neq 0$ равенство $\omega \wedge \omega = 0$ возможно только если $\omega = e_1 \wedge e_2$. □

Упражнение 14.11. Запишем координаты векторов $u, w \in \Bbbk^4$ в стандартным базисом $e_1, \dots, e_4$ по строкам матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} .$$

Убедитесь, что коэффициент при $e_i \wedge e_j$ в произведении $\omega = u \wedge w$ равен минору

$$A_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$$

и выведите отсюда, что шесть чисел $A_{ij} \in \Bbbk$ являются минорами $2\times 4$ матрицы если и только если выполняется квадратичное соотношение Плюккера[1] $A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$.

**14.3. Симметричные и знакопеременные тензоры.** Всюду в этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль. Симметрическая группа $S_n$ действует на разложимых тензорах из $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей: для каждого $g \in S_n$ положим[2]

$$g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{g^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{g^{-1}(n)} . \tag{14-9}$$

Так как правая часть полилинейно зависит от $v_1, \dots, v_n$, эта формула корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметричным*, если $g(t) = t$ для всех $g \in S^n$, и *знакопеременным* — если $g(t) = \operatorname{sgn}(g)\, t$ для всех $g \in S^n$. Симметричные и знакопеременные тензоры образуют в $V^{\otimes n}$ векторные подпространства

$$\operatorname{Sym}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \;\, g(t) = t \,\} ,$$
$$\operatorname{Alt}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \;\, g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t \,\} .$$

**14.3.1. Стандартные базисы.** Зафиксируем в пространстве $V$ базис $E \subset V$ и будем записывать тензоры $t \in V^{\otimes n}$ в виде некоммутативных многочленов от базисных мономов $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$, где $e_i \in E$. Два таких монома лежат в одной $S_n$-орбите если и только если для каждого $e \in E$ количество $m(e)$ равных $e$ сомножителей в этих мономах одинаково. Мы заключаем, что $S_n$-орбиты базисных мономов в $V^{\otimes n}$ нумеруются функциями $m : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ с конечным носителем и суммой значений $|m| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e\in E} m(e)$ равной $n$. При этом тензор $t$ симметричен если и только если вместе с каждым базисным моном в него с тем же самым коэффициентом входят все мономы $S_n$-орбиты этого базисного монома. Мы заключаем, что симметричные тензоры

$$e_{[m]} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{matrix}\text{сумма всех базисных тензорных мономов, куда} \\ \text{каждый вектор } e \in E \text{ входит ровно } m(e) \text{ раз,}\end{matrix}\right) \tag{14-10}$$

занумерованные функциями $m : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ с $|m| = n$, образуют базис векторного подпространства $\operatorname{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$. Например, базис в $\operatorname{Sym}^3(\Bbbk^2)$ составляют тензоры

$$e_{[3,0]} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 , \quad e_{[0,3]} = e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 ,$$
$$e_{[2,1]} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 ,$$
$$e_{[1,2]} = e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 ,$$

[1] Ср. с формулой (8-20) из прим. 8.5 на стр. 136.

[2] Обратите внимание, что набор занумерованных векторов $v_1, \dots, v_n$ есть не что иное, как отображение $v : \{1, \dots, n\} \to V$. Левое действие группы $S_n$ автоморфизмов множества $\{1, \dots, n\}$ на таких отображениях задаётся правилом $gv(i) = v(g^{-1}(i))$. При этом $i$-й слева элемент набора $v$ оказывается в наборе $g(v)$ на $g(i)$-м слева месте.

где $E = \{e_1, e_2\} \subset \Bbbk^2$ — стандартный базис, а $[i,j] : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$.

Упражнение 14.12. Убедитесь, что в сумме (14-10) ровно $n!/\prod_{e\in E} m(e)!$ слагаемых.

В разложении кососимметричного тензора $t \in \mathrm{Alt}^n V$ участвуют только те базисные мономы $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$, у которых $e_i \neq e_j$ при $i \neq j$. Орбита такого монома состоит из $n!$ мономов

$$e_{g(1)} \otimes \ldots \otimes e_{g(n)}\,, \text{ где } g \in S_n\,,$$

и коэффициент при каждом таком мономе получается из коэффициента при $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ умножением на $\mathrm{sgn}\, g$. Мы заключаем, что если зафиксировать на множестве базисных векторов $E \subset V$ какой-нибудь линейный порядок, то кососимметричные тензоры

$$\langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \rangle \overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, e_{g(1)} \otimes \ldots \otimes e_{g(n)}\,, \text{ где } e_1 < \ldots < e_n\,, \tag{14-11}$$

составят базис векторного подпространства $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$.

Теорема 14.2 (поляризация многочленов)

Если $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$, то ограничения отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\mathrm{com}} \cap V^{\otimes n})\,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto v_1 \ldots v_n\,, \tag{14-12}$$

на подпространство симметричных тензоров $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n})\,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n\,, \tag{14-13}$$

на подпространство знакопеременных тензоров $\mathrm{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ являются линейными изоморфизмами векторных пространств. Они действуют на стандартные базисы (14-10) и (14-11) так:

$$e_{[m]} \mapsto \frac{n!}{\prod_{e\in E} m(e)!} \prod\nolimits_{e\in E} e^{m(e)}\,, \tag{14-14}$$

$$\langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \rangle \mapsto n!\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\,. \tag{14-15}$$

Доказательство. Проекция (14-12) переводит каждое из $n!/\prod_{e\in E} m(e)!$ слагаемых, входящих в сумму (14-10), в стандартный коммутативный базисный моном $\prod_{e\in E} e^{m(e)}$ алгебры многочленов $\Bbbk[E]$, а проекция (14-13) переводит каждое из $n!$ слагаемых суммы (14-11) в стандартный базисный грассманов моном $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ алгебры грассмановых многочленов $\Bbbk\langle E\rangle$. □

Предостережение 14.1. Не смотря на теор. 14.2, симметричные и знакопеременные тензоры, т. е. подпространства $\mathrm{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ и $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, не следует путать с однородными многочленами, т. е. с фактор пространствами $S^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\mathrm{com}} \cap V^{\otimes n})$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n})$. Если $\mathrm{char}\,\Bbbk = p > 0$, то ограничения проекций $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространства симметрических и знакопеременных тензоров могут иметь ненулевые ядра. Даже в характеристике нуль эти проекции переводят стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств не буквально друг в друга, но в некоторые кратности друг друга, и эти поправочные комбинаторные множители приходится учитывать как при попытке поднять на пространства симметричных и знакопеременных тензоров коммутативное и $s$-коммутативное умножения, имеющиеся в алгебрах $SV$ и $\Lambda V$, так и при попытке спустить в симметрическую и грассманову алгебру отображения свёртки, которые имеются между тензорами из двойственных пространств $V$ и $V^*$.

**14.3.2. Двойственность.** Напомню, что полная свёртка[1] задаёт невырожденное спаривание между тензорными степенями $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ двойственных друг другу конечномерных векторных пространств $V$ и $V^*$, и тензорные мономы $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$ и $x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_n}$, составленные из векторов двойственных друг другу базисов $e_1, \ldots, e_d \in V$ и $x_1, \ldots, x_d \in V^*$, образуют двойственные другу базисы в $V^{\otimes n}$ и в $V^{*\otimes n}$. Если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то ограничение этого спаривания на подпространства симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n V$ и $\operatorname{Sym}^n V^*$ тоже невырождено, и стандартные базисные симметрические тензоры (14-10) сворачиваются друг с другом по правилу

$$\langle\, x_{[m]}\,,\, e_{[m]}\,\rangle = n!/\prod\nolimits_{e\in E} m(e)! \quad \text{и} \quad \langle\, x_{[k]}\,,\, e_{[\ell]}\,\rangle = 0 \text{ при } k \neq \ell\,, \tag{14-16}$$

поскольку каждое слагаемое суммы (14-10) сворачивается в единицу ровно с одним слагаемым такой же суммы, составленной из двойственных базисных векторов, и сворачивается в нуль со всеми прочими базисными мономами. Изоморфизм (14-14) превращает это спаривание в невырожденное каноническое спаривание между симметрическими степенями $S^nV$ и $S^nV^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов *любых* двойственных друг базисов в $V$ и в $V^*$ спариваются по правилу

$$\langle\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}\,,\, e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n}\,\rangle = \begin{cases} m_1! \ldots m_n!/n! & \text{если } (k_1, \ldots, k_n) = (m_1, \ldots, m_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{14-17}$$

Аналогичным образом, ограничение полной свёртки на подпространства $\operatorname{Alt}^n V$ и $\operatorname{Alt}^n V^*$ над полем характеристики нуль задаёт между ними невырожденное спаривание, при котором стандартные базисные знакопеременные тензоры (14-11) сворачиваются по правилу

$$\langle\, \langle x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_n} \rangle\,,\, \langle e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_n} \rangle\,\rangle = \begin{cases} n! & \text{если } (i_1, \ldots, i_n) = (j_1, \ldots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{14-18}$$

и посредством изоморфизма (14-15) это спаривание превращается в невырожденное спаривание между внешними степенями $\Lambda^nV$ и $\Lambda^nV^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов *любых* двойственных друг базисов в $V$ и в $V^*$ спариваются по правилу

$$\langle\, x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}\,,\, e_{m_1} \wedge \ldots \wedge e_{m_n}\,\rangle = \begin{cases} 1/n! & \text{если } (i_1, \ldots, i_n) = (j_1, \ldots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{14-19}$$

где оба набора индексов строго возрастают: $i_1 < \ldots < i_n$ и $j_1 < \ldots < j_n$.

**14.3.3. Проекторы.** Линейные отображения

$$\operatorname{sym}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{g\in S_n} g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}\,, \quad t \mapsto \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{g\in S_n} g(t)\,, \tag{14-20}$$

$$\operatorname{alt}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}\,, \quad t \mapsto \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, g(t)\,, \tag{14-21}$$

называются *симметризацией* и *альтернированием* тензоров.

Упражнение 14.13. Убедитесь, что оба они перестановочны с действием группы $S_n$, т. е.

$$\operatorname{sym}_n \circ g = g \circ \operatorname{sym}_n \;\text{ и }\; \operatorname{alt}_n \circ g = g \circ \operatorname{alt}_n \;\text{ для всех } g \in S_n.$$

[1] См. n° 14.1 на стр. 222.

Из упражнения вытекает, что симметризация перестановочна с альтернированием. Очевидно также, что симметризация тождественно действует на симметричные тензоры и аннулирует знакопеременные, а альтернирование тождественно действует на знакопеременные тензоры и аннулирует симметричные. Мы заключаем, что сумма $\mathrm{Sym}^n \oplus \mathrm{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ прямая, и оператор $\mathrm{sym}_n$ проектирует[1] $V^{\otimes n}$ на подпространство $\mathrm{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ вдоль подпространства $\ker \mathrm{sym}_n$, содержащего $\mathrm{Alt}^n V$, а оператор $\mathrm{alt}_n$ проектирует[2] $V^{\otimes n}$ на подпространство $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ вдоль подпространства $\ker \mathrm{alt}_n$, содержащего $\mathrm{Sym}^n V$. В частности,

$$\mathrm{sym}_n^2 = \mathrm{sym}_n\,, \quad \mathrm{alt}_n^2 = \mathrm{alt}_n \quad \text{и} \quad \mathrm{sym}_n \mathrm{alt}_n = \mathrm{alt}_n \mathrm{sym}_n = 0\,. \tag{14-22}$$

Пример 14.6 (разложение тензорного квадрата)
Поскольку для $d$-мерного векторного пространства $V$

$$\dim \mathrm{Sym}^2 V + \dim \mathrm{Alt}^2 V = \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 = \dim V^{\otimes 2}\,,$$

мы заключаем, что $V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \dim \mathrm{Alt}^2 V$. Это согласуется с известным из курса линейной алгебры[3] фактом, что каждая билинейная форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$, которая по сл. 14.1 на стр. 222 представляет собою тензор $\beta \in V^{*\otimes 2}$, однозначно раскладывается в сумму $\beta = \beta_+ + \beta_-$ симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(u,w) = \frac{\beta(u,w)+\beta(w,u)}{2} \in \mathrm{Sym}^2 V^* \quad \text{и} \quad \beta_-(u,w) = \frac{\beta(u,w)-\beta(w,u)}{2} \in \mathrm{Alt}^2 V^*\,.$$

В частности, $\ker \mathrm{sym}_2 = \mathrm{Alt}^2 V$ и $\ker \mathrm{alt}_2 = \mathrm{Sym}^2 V$.

Пример 14.7 (разложение тензорного куба)
В условиях предыдущего примера при $\dim V = d \geqslant 2$

$$\dim \mathrm{Sym}^3 V + \dim \mathrm{Alt}^3 V = \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d-1)(d-2)}{6} = \frac{d^3+2d}{3} < d^3 = \dim V^{\otimes 3}\,.$$

Поэтому $\mathrm{Sym}^3 V \oplus \mathrm{Alt}^3 V \neq V^{\otimes 3}$. Из соотношений (14-22) вытекает, что оператор

$$\pi_\Delta \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}(\mathrm{Id} + \tau + \tau^2)\,, \quad \text{где} \quad \tau = |1,2,3\rangle \in S_3 \text{ — 3-цикл},$$

тоже является проектором[4], ибо $\pi_\Delta^2 = (\mathrm{Id} - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3)^2 = \mathrm{Id} - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \pi_\Delta$. Его образ

$$\operatorname{im} \pi_\Delta = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \pi_\Delta(t) = t\} = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau(t) + \tau^2(t) = 0\}$$

состоит из тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Если интерпретировать тензоры $t \in V^{\otimes 3}$ как трилинейные формы $t : V^* \times V^* \times V^* \to \Bbbk$, то $\operatorname{im} \pi_\Delta$ состоит из трилинейных форм, удовлетворяющих *тождеству Якоби* $t(\xi,\eta,\zeta) + t(\eta,\zeta,\xi) + t(\zeta,\xi,\eta) = 0$. Если обозначить

[1] См. прим. 9.7 на стр. 160.
[2] См. прим. 9.7 на стр. 160.
[3] См. раздел 13.4 на с. 179 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf.
[4] См. прим. 9.7 на стр. 160.

через $[a,b] \overset{\text{def}}{=} a\otimes b - b\otimes a$ коммутатор в ассоциативной алгебре $TV$, то для любых трёх векторов $u,v,w\in V$ тензор $[u,[v,w]]\in V^{\otimes 3}$ лежит в $\operatorname{im}\pi_\Delta$, ибо

$$\begin{aligned}
[u,[v,w]] &= u\otimes v\otimes w - u\otimes w\otimes v - v\otimes w\otimes u + w\otimes v\otimes u\\
\tau[u,[v,w]] &= w\otimes u\otimes v - v\otimes u\otimes w - u\otimes v\otimes w + u\otimes w\otimes v\\
\tau^2[u,[v,w]] &= v\otimes w\otimes u - w\otimes v\otimes u - w\otimes u\otimes v + v\otimes u\otimes w\,.
\end{aligned}$$

Упражнение 14.14*. Обозначим через $\operatorname{Lie}^3 V\subset V^{\otimes 3}$ линейную оболочку всевозможных двойных коммутаторов $[u,[v,w]]$, где $u,v,w\in V$. Покажите, что $\operatorname{im}\pi_\Delta = \operatorname{Lie}^3 V\oplus\tau\operatorname{Lie}^3 V$.

Так как каждый из проекторов $\operatorname{sym}_3$, $\pi_\Delta$, $\operatorname{alt}_3$ аннулирует образы двух других, каждое из подпространств $\operatorname{im}\operatorname{sym}_3$, $\operatorname{im}\pi_\Delta$, $\operatorname{im}\operatorname{alt}_3$ пересекает сумму двух других по нулю. В силу равенства $\mathrm{Id} = \operatorname{sym}_3 + \pi_\Delta + \operatorname{alt}_3$ каждый тензор $t\in V^{\otimes 3}$ раскладывается в сумму $t = \operatorname{sym}_3 t + \pi_\Delta t + \operatorname{alt}_3 t$. Мы заключаем, что $V^{\otimes 3} = \operatorname{im}\operatorname{sym}_3\oplus\operatorname{im}\pi_\Delta\oplus\operatorname{im}\operatorname{alt}_3 = \operatorname{Sym}^3 V\oplus\operatorname{Lie}^3 V\oplus\tau\operatorname{Lie}^3 V\oplus\operatorname{Alt}^3 V$.

Упражнение 14.15. Докажите тождество Якоби для коммутаторов[1]:

$$[u,[v,w]] + [w,[u,v]] + [v,[w,u]] = 0\,.$$

**14.4. Поляризация многочленов и частные производные.** Всюду в этом разделе мы считаем, что $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, а векторное пространство $V$ конечномерно. По теор. 14.2 для каждого многочлена $f\in S^nV^*$ существует единственный симметричный тензор $\tilde f\in\operatorname{Sym}^n V^*$, который проектируется в $f$ при факторизации $V^{\otimes n}\twoheadrightarrow S^nV$. Согласно сл. 14.1 на стр. 222 тензор $\tilde f$ задаёт симметричную $n$-линейную форму $\tilde f : V\times\ldots\times V\to\Bbbk$, значение которой на наборе векторов $(v_1,\ldots,v_n)$ равно полной свёртке тензора $\tilde f$ с тензором $v_1\otimes\ldots\otimes v_n$. В прим. 14.2 на стр. 226 мы видели, что каждый многочлен $f\in S^nV^*$ задаёт полиномиальную функцию $f : V\to\Bbbk$, причём для разложимых многочленов $f = \varphi_1\ldots\varphi_n$ значение $f(v) = \prod_i\varphi_i(v)$. Сравнивая эти две конструкции, мы заключаем, что для любого однородного многочлена $f$ степени $n$ на конечномерном векторном пространстве $V$ над полем характеристики нуль существует единственная такая $n$-линейная симметричная форма $\tilde f : V\times\ldots\times V\to\Bbbk$, что для всех $v\in V$

$$f(v) = \tilde f(v,\ldots,v)\,. \tag{14-23}$$

Эта форма называется *полной поляризацией* многочлена $f$. Полная поляризация $\tilde q : V\times V\to\Bbbk$ однородной квадратичной формы $q\in S^2V^*$ известна из курса линейной алгебры[2]:

$$\tilde q(u,w) = \big(q(u+w) - q(u) - q(w)\big)/2\,.$$

Полная поляризация однородного кубического многочлена имеет вид

$$6\,\tilde f(u,v,w) = f(u+v+w) - f(u+v) - f(u+w) - f(v+w) + f(u) + f(v) + f(w)\,.$$

Предложение 14.5 (комбинаторная формула для полной поляризации)

$$n!\,\tilde f(v_1,\ldots,v_n) = \sum\nolimits_{I\subsetneq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{\ell(I)} f\Big(\sum\nolimits_{i\notin I} v_i\Big)\,, \tag{14-24}$$

где суммирование идёт по всем собственным подмножествам $I\subsetneq\{1,\ldots,n\}$, включая пустое, а $\ell(I)$ означает число элементов в $I$.

[1] Обратите внимание, что тензоры $[w,[u,v]]$ и $[v,[w,u]]$ отличаются от $\tau[u,[v,w]]$ и $\tau^2[u,[v,w]]$!

[2] См. раздел 14.3 на стр. 186 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

Доказательство. Пусть заданы векторы $u_1, \dots, u_k \in V$, а набор векторов $w_1, \dots, w_n$ состоит из $m_i$ копий каждого из векторов $u_i$, где $i = 1, \dots, k$, все $m_i \geqslant 0$ и $m_1 + \dots + m_k = n$. Поскольку значение $\tilde f(w_1, \dots, w_n)$ не меняется при перестановках аргументов и зависит только от векторов $u_i$ и кратностей $m_i$, условимся записывать его как $\tilde f(u_1^{m_1}, \dots, u_k^{m_k}) = \tilde f(w_1, \dots, w_n)$. В этих обозначениях, для всех $f \in S^nV^*$ и любых $v_1, \dots, v_k \in V$ справедлива мультиномиальная формула[1]

$$f(v_1 + \dots + v_k) = \sum\nolimits_{m_1,\dots,m_k} \frac{n!}{m_1! \dots m_k!}\, \tilde f(v_1^{m_1}, \dots, v_k^{m_k}), \tag{14-25}$$

где суммирование идёт по всем наборам целых чисел $m_1, \dots, m_k$, в которых $0 \leqslant m_i \leqslant n$ при каждом $i$ и $m_1 + \dots + m_k = n$.

Упражнение 14.16. Убедитесь в этом.

При $k = n$ в правой части (14-25) имеется ровно одно слагаемое, зависящее от всех $n$ аргументов $v_1, \dots, v_n$, а именно, $n!\,\tilde f(v_1, \dots, v_n)$. Для каждого собственного подмножества $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ не зависящие от векторов $v_i$ с $i \in I$ слагаемые из правой части формулы (14-25) входят в неё с тем же самым коэффициентом, что и в разложение (14-25) для $f\left(\sum_{i\notin I} v_i\right)$, поскольку последнее получается из разложения для $f(v_1+\dots+v_n)$ подстановкой $v_i = 0$ для всех $i \in I$. Таким образом, все слагаемые, не содержащие хотя бы один из векторов $v_i$, могут быть удалены из (14-25) при помощи стандартной процедуры включения-исключения, что и даёт заявленную формулу

$$n! \cdot \tilde f(v_1, \dots, v_n) = f\Big(\sum_{\nu} v_\nu\Big) - \sum_{\{i\}} f\Big(\sum_{\nu\neq i} v_\nu\Big) + \sum_{\{i,j\}} f\Big(\sum_{\nu\neq i,j} v_\nu\Big) - \sum_{\{i,j,k\}} f\Big(\sum_{\nu\neq i,j,k} v_\nu\Big) + \dots \,. \qquad \square$$

Предложение 14.6 (принцип Аронгольда)

Над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n V \subset V^{\otimes}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n} = v \otimes \dots \otimes n$, где $v \in V$, а пространство однородных многочленов $S^nV^*$ — многочленами $\varphi^n$, где $\varphi \in V^*$.

Доказательство. Двойственное к $\operatorname{Sym}^n V$ пространство канонически изоморфно пространству симметричных $n$-линейных форм $V \times \dots \times V \to \Bbbk$. Если такая форма $\tilde f$ зануляется на всех наборах $(v, \dots, v)$, то многочлен $f \in S^nV^*$, поляризацией которого она является, задаёт тождественно нулевую функцию $f : V \to \Bbbk$, откуда $f = 0$, а значит и $\tilde f = 0$. Тем самым, линейная оболочка тензоров $v^{\otimes n}$ не лежит ни в какой гиперплоскости пространства $\operatorname{Sym}^n V$, что доказывает первое утверждение. Второе следует из первого, поскольку при изоморфизме $\operatorname{Sym}^n V^* \xrightarrow{\sim} S^nV^*$ тензоры $\varphi^{\otimes n}$ переходят в многочлены $\varphi^n$. $\square$

**14.4.1. Производная многочлена в направлении вектора.** Зафиксируем вектор $v \in V$. Свёртка с этим вектором по первому тензорному сомножителю задаёт линейное отображение[2]

$$i_v : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n-1)} .$$

Применяя его к полной поляризации $\tilde f$ многочлена $f \in S^nV^*$ и проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}V^*$, получаем линейно зависящее от $v$ линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^nV^* \to S^{n-1}V^*$, которое называется *поляризацией* вдоль $v$ и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \operatorname{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^* . \end{tikzcd} \tag{14-26}$$

[1] Ср. с прим. 0.2 на стр. 8.

[2] См. прим. 14.1 на стр. 223.

Пусть векторы $e_1, \dots, e_d \in V$ и ковекторы $x_1, \dots, x_d \in V^*$ образуют двойственные базисы. Согласно форм. (14-14) на стр. 231 каждый базисный моном $x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} \in S^n V^*$ поляризуется в симметричный тензор

$$\frac{n!}{m_1! \dots m_d!} x_{[m_1,\dots,m_d]} \in \operatorname{Sym}^n V^* ,$$

где $x_{[m_1,\dots,m_d]}$ обозначает сумму всех тензорных мономов, содержащих каждый базисный ковектор $x_i$ ровно $m_i$ раз. Свёртка тензора $x_{[m_1,\dots,m_d]}$ с базисным вектором $e_i \in V$ по первому тензорному сомножителю зануляется при $m_i = 0$, а во всех остальных случаях равна

$$x_{[m_1,\dots,m_{i-1},m_i-1,m_{i+1},m_d]} \in \operatorname{Sym}^{n-1} V^* .$$

Мы заключаем, что $\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n} x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i-1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$. Напомню, что в анализе *частная производная* многочлена $f \in SV^*$ в направлении вектора

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d \in V$$

определяется равенством

$$\partial_v f \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_d \frac{\partial f}{\partial x_d} .$$

Поскольку многочлен $\mathrm{pl}_v f$ билинейно зависит от $v$ и $f$, для любых $u, w \in V$ и $f \in S^n V^*$ справедливо равенство

$$\mathrm{pl}_u f(w) = \tilde f(u, w^{n-1}) = \frac{1}{n} \partial_u f(w) . \tag{14-27}$$

Отметим, что поскольку левая часть этой формулы определена инвариантно, правая часть тоже не зависит от выбора двойственных координат в $V$ и $V^*$.

Применяя $n$ раз формулу (14-27), получаем ещё одно явное выражение полной поляризации $\tilde f$ многочлена $f \in S^n V^*$ через этот многочлен:

$$\tilde f(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} f . \tag{14-28}$$

Упражнение 14.17. Убедитесь, что частные производные коммутируют, т. е. $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ для всех $u, w \in V$, и докажите *правило Лейбница*: $\partial_v(fg) = g\partial_v(f) + f\partial_v(g)$.

Из формулы (14-27) также вытекает, что для любых $u, w \in V$ и $f \in S^n V^*$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\tilde f\left(u^k, w^{n-k}\right) = \frac{(n-k)!}{n!} \partial_u^k f(w) = \frac{k!}{n!} \partial_w^{n-k} f(u) , \tag{14-29}$$

где $\partial_v^\ell = \partial_v \dots \partial_v$ означает $\ell$-кратную производную в направлении $v$.

Пример 14.8 (разложение Тейлора)

Для любых двух векторов $u, w \in V$ и многочлена $f \in S^n V^*$ справедлива формула бинома[1]

$$f(u+w) = \tilde f\big((u+w), \dots, (u+w)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \tilde f(u^k, w^{n-k}) .$$

Соотношения (14-29) позволяют переписать это равенство как *разложение Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \partial_w^k f(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \partial_u^{n-k} f(w) . \tag{14-30}$$

справедливое для всех $f \in S^n V^*$ и симметричное по $u, w$ в силу соотношений (14-29).

[1] См. формулу (14-25) на стр. 235.

**14.4.2. Линейный носитель многочлена.** Линейный носитель[1] $\operatorname{supp}\tilde f \subset V^*$ полной поляризации $\tilde f$ многочлена $f \in S^n V^*$ называется *линейным носителем многочлена* $f$. Он равен пересечению всех таких подпространств[2] $U \subset V^*$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и является, тем самым, наименьшим из этих подпространств, как по включению, так и по размерности.

Упражнение 14.18. Убедитесь, что многочлен $f$ корректно задаёт полиномиальную функцию на $V/\operatorname{Ann}\big(\operatorname{supp} f\big)$ по правилу $f([v]) = f(v)$.

Согласно теор. 14.1 на стр. 224, подпространство $\operatorname{supp} f \subset V^*$ является образом полной свёртки $c_f : V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ с тензором $\tilde f$ по первым[3] $n-1$ его тензорным сомножителям, т. е. $\binom{n+d-2}{d-1}$ линейными формами

$$\tilde f(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}) \in V^*, \quad \text{где} \quad m_1 + \ldots + m_d = n-1\,. \tag{14-31}$$

Если записать многочлен $f$ в виде

$$f = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_d!}\, a_{\nu_1 \dots \nu_d}\, x_1^{\nu_1} \dots x_d^{\nu_d}\,, \tag{14-32}$$

то его полная поляризация, согласно форм. (14-14) на стр. 231, будет иметь вид

$$\tilde f = \sum\nolimits_{\nu_1 \dots \nu_d} a_{\nu_1 \dots \nu_d} x_{[\nu_1 \dots \nu_d]}\,,$$

где $x_{[\nu_1 \dots \nu_d]} \in \operatorname{Sym}^n V^*$ — сумма всех тензорных мономов, содержащих $\nu_i$ сомножителей $x_i$ для всех $i = 1, \dots, d$, а линейные формы (14-31) — вид

$$\tilde f(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}) = \sum\nolimits_{i=1}^{d} a_{m_1 \dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1} \dots m_d} x_i\,. \tag{14-33}$$

Предложение 14.7 (многочлены с одномерным носителем)
Однородный многочлен (14-32) над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль тогда и только тогда является $n$-той степенью линейной формы, когда $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрица из коэффициентов линейных форм (14-33) имеет ранг 1. В этом случае есть ровно $n$ линейных форм $\varphi$, удовлетворяющих уравнению $\varphi^n = f$, все они пропорциональны формам (14-33) и получаются друг из друга умножением на корни $n$-той степени из единицы в поле $\Bbbk$.

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\operatorname{supp} f$ одномерен и порождён формой $\varphi$. В этом случае все формы (14-33) пропорциональны форме $\varphi$, и уравнение $t^n = f$ имеет в целостном кольце $\Bbbk[x_1, \dots, x_d]$ ровно $n$ корней вида $\zeta \cdot \varphi$, где $\zeta$ пробегает множество корней из единицы в поле $\Bbbk$. Наоборот, если все формы (14-33) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\operatorname{supp} f = \Bbbk \cdot \psi$ и $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, а $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

---

[1] См. n° 14.1.2 на стр. 223.

[2] Обратите внимание, что линейный носитель многочлена на пространстве $V$ является векторным подпространством в $V^*$, а не в $V$.

[3] Из-за симметричности тензора $\tilde f$ свёртка не зависит от выбора последовательности из $n-1$ индексов, по которым она производится.

Пример 14.9 (бинарные формы ранга 1)
Однородный многочлен степени $n$ от двух переменных $f(x_0,x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^k x_1^{n-k}$ представляется в виде $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n = \sum_k \alpha_0^k \alpha_1^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^k x_1^{n-k}$ если и только если отношение $a_{k+1} : a_k = \alpha_0 : \alpha_1$ не зависит от $k$, что означает пропорциональность стролбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} = 1\,, \tag{14-34}$$

и выражается квадратичными соотношениями $a_i a_{j-1} = a_{i-1} a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, на коэффициенты многочлена $f$. Это согласуется с предл. 14.7: столбцы матрицы (14-34) суть коэффициенты $n$ линейных форм $\tilde f(e_0^{i-1}, e_1^{n-i}) = a_i x_0 + a_{i-1} x_1$ из формулы (14-33).

**14.5. Грассмановы производные и соотношения Плюккера.** Согласно теор. 14.2, над полем нулевой характеристики проекция $\mathrm{Alt}^n V \to \Lambda^n V$ знакопеременных тензоров на фактор тензорной алгебры по соотношениям антикоммутирования является изоморфизмом. Обратный к нему изоморфизм $\Lambda^n V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^n V$ называется *полной поляризацией* грассмановых многочленов. Он сопоставляет однородному грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V$ единственный знакопеременный тензор $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, лежащий в классе $\omega \in V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n})$.

**14.5.1. Грассмановы частные производные.** Как и для обычных многочленов[1], каждый ковектор $\xi \in V^*$ задаёт линейное отображение $\mathrm{pl}_\xi : \Lambda^n V \to \Lambda^{n-1} V$ *поляризации вдоль* $\xi$, которое переводит грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V$ в проекцию на $\Lambda^{n-1} V$ результата свёртки полной поляризации $\widetilde{\omega}$ многочлена $\omega$ с ковектором $\xi$ по первому тензорному сомножителю и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{\otimes n} \supset \mathrm{Alt}^n V \arrow[r, "i_\xi"] & V^{\otimes (n-1)} \arrow[d] \\ \Lambda^n V \arrow[u, leftarrow, "\wr"] \arrow[r, "\mathrm{pl}_\xi"] & \Lambda^{n-1} V\,. \end{tikzcd}$$

Определим *грассманову производную* от $\omega$ в направлении ковектора $\xi \in V^*$ формулой

$$\partial_\xi \omega \overset{\text{def}}{=} n\,\mathrm{pl}_\xi \omega\,.$$

Так как тензор $\widetilde{\omega}$ кососимметричен, для любых $\xi,\ \eta,\ \psi_1, \dots, \psi_{n-2} \in V^*$

$$i_\xi i_\eta \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = \omega\left(\xi, \eta, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -\omega\left(\eta, \xi, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -i_\eta i_\xi \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right)\,,$$

т. е. грассмановы поляризации и грассмановы частные производные антикоммутируют:

$$\mathrm{pl}_\xi \mathrm{pl}_\eta = -\mathrm{pl}_\eta \mathrm{pl}_\xi \quad \text{и} \quad \partial_\xi \partial_\eta = -\partial_\eta \partial_\xi\,,$$

в частности $\partial_\xi^2 = 0$ для любого $\xi \in V^*$, что согласуется с тем, что грассмановы многочлены линейны по каждой переменной. Как и в коммутативном случае[2], выполняется равенство

$$\widetilde{\omega}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{n!}\,\partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_n} \omega\,. \tag{14-35}$$

[1]Ср. с n° 14.4.1 на стр. 235
[2]Ср. с 14-28 на стр. 236

Если ковекторы $x_i \in V^*$ и векторы $e_i \in V$ образуют двойственные друг другу базисы пространств $V$ и $V^*$, то в силу билинейной зависимости $\mathrm{pl}_\xi\omega$ от $\xi$ и $\omega$, грассманова производная в направлении ковектора $\xi = \sum_i \alpha_i x_i$ может быть записана как $\partial_\xi = \sum_i \alpha_i\,\partial_{x_i}$. При этом ненулевой вклад в $\partial_{x_i}\omega$ будет лишь от входящих в $\omega$ мономов $e_J = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n}$ с $J \ni i$.

Упражнение 14.19. Убедитесь, что $\partial_{x_{i_1}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ для любой[1] последовательности попарно разных индексов $i_1, \ldots , i_n$.

Таким образом, дифференцирование грассманова монома в направлении базисного ковектора, двойственного к первой слева переменной в мономе, ведёт себя как обычная частная производная $\partial/\partial_{e_{i_1}}$ по этой переменной. В силу анткоммутативности грассмановых переменных, дифференцирование по $k$-той слева переменной монома ведёт себя как $(-1)^{k-1}\partial/\partial_{e_{i_k}}$:

$$\partial_{x_{i_k}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = \partial_{x_{i_k}} (-1)^{k-1} e_{i_k} \wedge e_{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \ \ldots \ e_{i_n} = \\ = (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \ \ldots \ e_{i_n}\,.$$

Иначе говоря, грассмановы производные удовлетворяют *грассманову правилу Лейбница*: для любых однородных грассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V$ и любого ковектора $\xi \in V^*$

$$\partial_\xi(\omega \wedge \eta) = \partial_\xi(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg\omega}\omega \wedge \partial_\xi(\eta)\,. \tag{14-36}$$

**14.5.2. Линейный носитель грассманова многочлена.** Как и в коммутативном случае, *линейный носитель* $\operatorname{supp}\omega \subset V$ однородного грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как линейный носитель[2] $\operatorname{supp}(\widetilde{\omega})$ его полной поляризации $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$. Он равен пересечению всех таких подпространств $U \subset V$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и является, тем самым, наименьшим из этих подпространств, как по включению, так и по размерности. Полной поляризацией грассманова многочлена

$$\omega = \sum\nolimits_I a_I e_I = \sum\nolimits_{i_1<\ldots<i_n} a_{i_1\ldots i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}\,, \tag{14-37}$$

где $I = (i_1, \ldots , i_n)$ пробегает возрастающие последовательности из $n$ индексов, является тензор[3]

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_I a_I \langle e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}\rangle = \sum\nolimits_{i_1,\ldots,i_n} \tilde{a}_{i_1\ldots i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}\,, \tag{14-38}$$

где справа суммирование идёт уже по всем последовательностям из $n$ не повторяющихся индексов, а коэффициенты $\tilde{a}_{i_1\ldots i_n}$ кососимметричны по $i_1, \ldots , i_n$ и $\tilde{a}_{i_1\ldots i_n} = a_{i_1\ldots i_n}/n!$ когда индексы строго возрастают. По теор. 14.1 на стр. 224, подпространство $\operatorname{supp}(\widetilde{\omega}) \subset V$ является образом полной свёртки $c_{\widetilde{\omega}} : V^{*\otimes(n-1)} \to V$ с тензором $\widetilde{\omega} \in V^{\otimes n}$ по первым $n-1$ тензорным сомножителям[4] и линейно порождается векторами

$$w_J = c_{\widetilde{\omega}}(x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_{n-1}}) = \sum_{i\notin J} \tilde{a}_{j_1\ldots j_{n-1}i}\, e_i\,, \tag{14-39}$$

где $J = (j_1, \ldots , j_{n-1})$ пробегает возрастающие последовательности из $n-1$ индексов.

[1] Не обязательно возрастающей.

[2] См. n° 14.1.2 на стр. 223.

[3] См. формулу (14-15) на стр. 231.

[4] В силу знакопеременности тензора $\widetilde{\omega}$ выбор последовательности из $n-1$ сворачиваемых сомножителей может привести лишь к смене знака у результата.

Предложение 14.8 (грассмановы многочлены с минимальным ненулевым носителем)
Следующие три условия на грассманов многочлен (14-37) эквивалентны:

1) $\dim\operatorname{supp}\omega \leqslant n$ 2) $\omega = u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$, где $u_1, \ldots, u_n \in V$ 3) $\forall\, u \in \operatorname{supp}\omega\ u \wedge \omega = 0$

4) для любых двух наборов $I, J$ возрастающих индексов $i_1 < \ldots < i_{m+1}$ и $j_1 < \ldots < j_{m-1}$, таких, что $I \not\supset J$, выполнены *соотношения Плюккера*

$$\sum\nolimits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} \tilde{a}_{j_1 \ldots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \ldots \hat{i}_\nu \ldots i_{m+1}} = 0\,, \tag{14-40}$$

где «крышка» в $a_{i_1 \ldots \hat{i}_\nu \ldots i_{m+1}}$ означает, что индекс $i_\nu$ следует пропустить.

Доказательство. Условия (1), (2) и (3) очевидно эквивалентны и означают, что $\omega$ лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim\operatorname{supp}\omega}$ своей линейной оболочки $\operatorname{supp}\omega$.

Упражнение 14.20. Пусть $\omega \in \Lambda V$ и $\dim V = d$. Убедитесь, что $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$ если и только если $\omega \in \Lambda^d V$.

Соотношение (14-40) констатирует обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $w_J \wedge \omega$ для линейно порождающих $\operatorname{supp}\omega$ векторов $w_J$ из формулы (14-39). □

Пример 14.10 (продолжение прим. 8.5 на стр. 136 и предл. 14.4 на стр. 229)
Для четырёхмерного пространства $V$ с базисом $e_1, \ldots, e_4$ и $\omega = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ соотношение Плюккера для наборов индексов $I = (2,3,4)$ и $J = (1)$ имеет вид[1] $-a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} = 0$, и любой другой выбор непересекающихся наборов $(i_1, i_2, i_3)$ и $(j)$ приводит к тому же самому с точностью до общего знака соотношению. Если $j \in \{i_1, i_2, i_3\}$, скажем $I = (1,2,3)$, $J = (1)$, то получается тривиальное соотношение $a_{12}a_{13} - a_{13}a_{12} = 0$.

Пример 14.11
Если $V = \Bbbk^5$ с базисом $e_1, \ldots, e_5$, то по предл. 14.4 на стр. 229 разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$ равносильна равенству $\omega \wedge \omega = 0$. Поскольку $\omega \wedge \omega$ лежит в пятимерном пространстве $\Lambda^4 \Bbbk^5$, это равенство эквивалентно пяти квадратичным соотношениям на коэффициенты $a_{ij}$ формы $\omega$. Эти пять соотношений совпадают с пятью соотношениями Плюккера, возникающими из пяти пар непересекающихся наборов индексов $I = (i_1, i_2, i_3)$ и $J = (j)$, объединения которых $I \sqcup J$ пробегают пять различных четырёхэлементных подмножеств в $\{1, \ldots, 5\}$. При фиксированном $I \sqcup J$ четыре различных разбиения этого множества на непересекающиеся поднаборы из одного и трёх элементов дают, как и в предыдущем прим. 14.10, одинаковые с точностью до общего знака соотношения вида

$$\tilde{a}_{i_1 j} a_{i_2 i_3} - \tilde{a}_{i_2 j} a_{i_1 i_3} + \tilde{a}_{i_3 j} a_{i_1 i_2} = 0\,.$$

При $j = i_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$ получается тривиальное соотношение $a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} - a_{i_1 i_3} a_{i_1 i_2} = 0$.

**14.6. Грассманианы.** Множество всех $m$-мерных векторных подпространств $d$-мерного векторного пространства $V$ называется *грассманианом* $\operatorname{Gr}(m,d)$ или $\operatorname{Gr}(m,V)$, если важно подчеркнуть природу пространства $V$. С проективной точки зрения грассманиан $\operatorname{Gr}(m,d)$ есть множество $(m-1)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_{d-1}$. Грассманианы являются естественными обобщениями проективных пространств: двойственные пространства

$$\mathbb{P}_n = \operatorname{Gr}(1, n+1) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n^\times = \operatorname{Gr}(n, n+1)$$

[1] Ср. с прим. 8.5 на стр. 136 и упр. 14.11 на стр. 230.

служат простейшими примерами грассманианов. Двойственность $U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U$ между $m$-мерными и $(d-m)$-мерными подпространствами двойственных векторных пространств $V$ и $V^*$ задаёт каноническое отождествление $\operatorname{Gr}(m, V) = \operatorname{Gr}(d-m, V^*)$.

**14.6.1. Плюккерово вложение.** Грассманиан $\operatorname{Gr}(m, V)$ вкладывается в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ *отображением Плюккера*

$$p_m : \operatorname{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \tag{14-41}$$

которое переводит $m$-мерное векторное подпространство $U \subset V$ в одномерное векторное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если векторы $u_1, \dots, u_m$ образуют базис в $U$, то $p_m(U) = u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$. Выбор другого базиса $w_1, \dots, w_m$ из векторов $w_i = \sum_j a_{ij} u_j$ заменяет $u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$ на пропорциональный разложимый грассманов многочлен $w_1 \wedge \ldots \wedge w_m = \det(a_{ij})\, u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$.

Предложение 14.9

Отображение Плюккера (14-41) инъективно, а его образ является алгебраическим многообразием, задаваемым квадратичными соотношениями Плюккера из предл. 14.8.

Доказательство. Образ отображения (14-41) состоит из всех разложимых грассмановых многочленов степени $m$ и описывается в предл. 14.8 на стр. 240. Покажем, что отображение Плюккера инъективно. Пусть $U \neq W$ и $\dim U \cap W = r < m$. Тогда в $V$ есть базис из таких векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_s, v_1, \dots, v_t,$$

где $s = m - r$, что векторы $e_1, \dots, e_r$ образуют базис в $U \cap W$, а наборы векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s \quad \text{и} \quad e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_s$$

являются базисами в $U$ и в $W$. Отображение Плюккера сопоставляет им разные базисные мономы $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_s$ и $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_s$ пространства $\Lambda^m V$. □

**14.6.2. Многообразие Сегре как сечение грассманиана.** Рассмотрим прямую сумму

$$W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств $V_i$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности целых чисел $m_1, \dots, m_n$, где $0 \leqslant m_i \leqslant \dim V_i$ и $m_1 + \ldots + m_n = k$, обозначим через $W_{m_1 \dots m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всех разложимых грассмановых многочленов $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$, у которых ровно $m_i$ сомножителей $w_\nu$ лежит в $V_i$ при всех $i = 1, \dots, n$.

Упражнение 14.21. Покажите, что правило $\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ корректно задаёт линейный изоморфизм $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \xrightarrow{\sim} W_{m_1 \dots m_n}$, и что

$$\Lambda^k W = \bigoplus\nolimits_{m_1, \dots, m_n} W_{m_1 \dots m_n} \simeq \bigoplus\nolimits_{m_1, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda^{m_n} V_n. \tag{14-42}$$

Тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ канонически изоморфно слагаемому $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$ из разложения (14-42). Изоморфизм переводит каждый разложимый тензор $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ в грассманов моном $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$. Мы заключаем, что многообразие Сегре из n° 13.1.2 на стр. 214 представляет собою пересечение $\operatorname{Gr}(n, W) \cap \mathbb{P}(W_{1 \dots 1})$ и является алгебраическим многообразием в $\mathbb{P}(\Lambda^n W)$, задаваемым квадратичными соотношениями Плюккера из предл. 14.8 и линейными уравнениями, описывающими векторное подпространство $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$.

**14.6.3. Однородные координаты на грассманиане** обобщают однородные координаты на проективном пространстве. Если зафиксировать в $V$ базис $e_1, \dots, e_d$, то $m$-мерное подпространство $U \subset V$ можно задавать матрицей $X_{\boldsymbol{u}}$ размера $d \times m$, по строкам которой записаны координаты векторов $u_1, \dots, u_m$ какого-нибудь базиса $\boldsymbol{u}$ в $U$. Разумеется, такое представление не единственно: другому базису $\boldsymbol{w}$ в $U$, составленному из векторов $w_1, \dots, w_m$, отвечает другая матрица $X_{\boldsymbol{w}} = C_{wu} X_{\boldsymbol{u}}$, получающаяся из $X_{\boldsymbol{u}}$ умножением слева на невырожденную квадратную $m \times m$-матрицу перехода, которая определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = C_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Мы заключаем, что грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d) = \mathrm{GL}_m(\Bbbk) \smallsetminus \mathrm{Mat}^{\circ}_{m\times d}(\Bbbk)$ является множеством орбит левого действия группы $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ на множестве $\mathrm{Mat}^{\circ}_{m\times d}(\Bbbk)$ матриц размера $m \times d$ и ранга $m$. При $m = 1$ это описание превращается в описание проективного пространства $\mathbb{P}_{d-1}$ как множества ненулевых координатных строк длины $d$ с точностью до умножения на ненулевые константы. Таким образом, матрица $X_{\boldsymbol{u}}$ с точностью до умножения слева на обратимые матрицы является прямым аналогом однородных координат.

**14.6.4. Плюккеровы координаты.** Плюккерово вложение $p_m : \mathrm{Gr}(m,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ сопоставляет $m$-мерному подпространству $U \subset V$ с базисом $u_1, \dots, u_m$ одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$ с базисом $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$. Если зафиксировать в $V$ базис $e_1, \dots, e_d$, а в $\Lambda^n V$ — базис из грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, то $I$-й однородной координатой разложимого грассманова многочлена $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ относительно базиса из мономов $e_I$ будет $I$-й минор $\det X_I$ порядка $m$, где $X_I \subset X$ — подматрица, образованная столбцами с номерами $i_1, \dots, i_n$.

Упражнение 14.22. Убедитесь в этом.

При умножении матрицы $X$ слева на обратимую матрицу $C \in \mathrm{GL}_m$ все $(m \times m)$-миноры $\det X_I$ матрицы $X$ умножатся на ненулевую константу $\det C$. Рассматриваемый с точностью до пропорциональности набор миноров $\det X_I$ называется *плюккеровыми координатами* задаваемой матрицей $X$ точки грассманиана $\mathrm{Gr}(m,d)$. Таким образом, плюккеровы координаты суть ограничения однородных координат в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на образ грассманиана при плюккеровом вложении $p_m : \mathrm{Gr}(m,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$.

**14.6.5. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты.** Аналогом $i$-й стандартной аффинной карты $U_i$ проективного пространства[1] $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1,n)$ на произвольном грассманиане $\mathrm{Gr}(m,d)$ является множество $U_I$ всех $m \times d$ матриц $X$ с ненулевым минором $\det X_I$. В $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$-орбите каждой такой матрицы $X$ есть единственный представитель, имеющий в столбцах $I$ единичную матрицу размера $m \times m$. Обозначим его $T^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} X_I^{-1} X$. Стоящие вне столбцов с номерами из $I$ матричные элементы $t^{(I)}_{\mu\nu}$ матрицы $T^{(I)}$ называются *локальными аффинными координатами* точки $X \in \mathrm{Gr}(m,d)$ в *стандартной* карте $U_I$, и всего их имеется $m(d-m)$. Плюккерово вложение $p_m : \mathrm{Gr}(m,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ биективно отображает карту $U_I \subset \mathrm{Gr}(m,V)$ на пересечение образа $p_m(\mathrm{Gr}(m,V))$ со стандартной аффинной картой $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на проективном пространстве.

[1] Она состоит из всех точек $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n$ с $x_i \neq 0$. Каждая такая точка $p$ однозначно представляется вектором, у которого $x_i = 1$, и остальные $n$ координат этого вектора берутся в качестве локальных аффинных координат точки $p$ в карте $U_i$, см. пример 16.4 на стр. 207 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf.

На геометрическом языке карта $U_I \subset \mathrm{Gr}(m, V)$ состоит из всех подпространств $U \subset V$, которые изоморфно отображаются на $I$-е координатное подпространство $E_I \subset V$, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$, при проекции $\pi_I : V \twoheadrightarrow E_I$ вдоль дополнительного координатного подпространства $E_J \subset V$, натянутого на базисные векторы $e_j$ с $j \notin I$. Подпространство $U \subset V$ лежит в стандартной карте $U_I$ если и только если $U \cap E_J = 0$, и в каждом таком подпространстве $U$ имеется единственный базис $u_1, \dots, u_m$, который проектируется в стандартный базис $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ пространства $E_I$. Матрица $T^{(I)}$ составлена из координат этих векторов $u_i$.

**14.6.6. Аффинная окрестность точки.** Более общим образом, для любого $(d-m)$-мерного векторного подпространства $W \subset V$ множество $U_W = \{U \in \mathrm{Gr}(m, V) \mid U \cap W = 0\}$ является аффинным пространством над векторным пространством $\mathrm{Hom}(V/W, W)$. В самом деле, любые два дополнительные к $W$ подпространства $U_1, U_2$ изоморфно проектируются на $V/W$ при факторизации $\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$. Поэтому у каждого класса $[v] = [v_1] = [v_2] \in V/W$ имеются единственные представители $v_1 \in U_1$ и $v_2 \in U_2$. Обозначая через $\overrightarrow{U_1U_2} : V/W \to W$ линейное отображение, переводящее класс $[v] \in V/W$ в разность $v_2 - v_1 \in W$ этих представителей, мы сопоставляем каждой паре точек $U_1, U_2 \in U_W$ вектор $\overrightarrow{U_1U_2} \in \mathrm{Hom}(V/W, W)$. Очевидно, что $\overrightarrow{U_1U_2} + \overrightarrow{U_2U_3} = \overrightarrow{U_1U_3}$ для всех $U_1, U_2, U_3 \in U_W$. Если зафиксировать любое «начальное» подпространство $U \in U_W$ и отождествить его с $V/W$ при помощи изоморфизма $\pi_W|_U : U \xrightarrow{\sim} V/W$, а $\mathrm{Hom}(V/W, W)$ отождествить с $\mathrm{Hom}(U, W)$, то отображение векторизации с центром в $U$, переводящее каждую точку $U_1 \in U_W$ в её радиус вектор $\overrightarrow{UU_1} \in \mathrm{Hom}(U, W)$, будет сопоставлять каждому дополнительному к $W$ подпространству $U_1 \subset U \oplus W$ линейное отображение $U \to W$, графиком которого является подпространство $U_1$. Очевидно, что такое сопоставление биективно. Поскольку $W \simeq V/U$, можно сказать, что каждая точка $U \in \mathrm{Gr}(m, V)$ обладает аффинной окрестностью, получающейся «откладыванием» от $U$ всевозможных векторов из пространства $\mathrm{Hom}(U, V/U)$. Если зафиксировать какое-нибудь дополнительное к $U$ подпространство $W$ и представлять классы из $V/U$ векторами из $W$, то результатом «откладывания» от $U$ отображения $\tau : U \to W$ будет график $\Gamma_\tau = \{(u, \tau(u)) \in U \oplus W \mid u \in U\}$ отображения $\tau$, представляющий собою дополнительное к $W$ подпространство в $V = U \oplus W$.

**14.6.7. Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$ и прямые в $\mathbb{P}_3$.** Первым отличным от проективного пространства грассманианом является $\mathrm{Gr}(2, 4)$, точками которого служат двумерные векторные подпространства $U$ в $V = \Bbbk^4$ или, что то же самое, проективные прямые $\ell = \mathbb{P}(U)$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Грассманиан $\mathrm{Gr}(2, 4)$ вкладывается в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ *отображением Плюккера*

$$p : \mathrm{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V), \quad U \mapsto \Lambda^2 U, \tag{14-43}$$

которое переводит прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_3$, являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства $U \subset V$ с базисом $a, b$, в одномерное подпространство $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$, порождённое грассмановым произведением $a \wedge b$. Согласно предл. 14.4 на стр. 229, разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega \in \Lambda^2 V$ на два линейных множителя равносильна тому, что $\omega \wedge \omega = 0$. Это соотношение задаёт в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ *квадрику Плюккера*

$$P = V(q) = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\}, \tag{14-44}$$

Симметричная билинейная форма $\tilde{q} : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \to \Bbbk$, которая является поляризацией уравнения этой квадрики, однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ в одномерном векторном пространстве $\Lambda^4 V$ выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \tag{14-45}$$

где $e_1, e_2, e_3, e_4$ — произвольный базис в $V$.

Упражнение 14.23. Убедитесь, что задаваемая равенством (14-45) форма $\tilde{q}$ билинейна, симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в $V$ умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах $x_{ij}$ относительно стандартного базиса $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ для формы $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ имеет вид[1] $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$, а отображение (14-43) переводит прямую $(ab)$, порождённую векторами $a$, $b$, строки координат которых в базисе $e_1, \dots, e_4$ составляют $2 \times 4$ матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, в грассманову квадратичную форму $a \wedge b$ с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$.

Лемма 14.1
Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (14-45).

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$, то в $V$ существует такой базис $e_1, e_2, e_3, e_4$, что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если $\ell_1$ и $\ell_2$ пересекаются в точке $a$, то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. □

Следствие 14.5
$P \cap T_p P = \{p(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \varnothing\}$ для любой точки $p = p(\ell) \in P$.

Пример 14.12 (связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$)
Множество прямых в $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $a_i = p(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = T_{a_1} P \cap T_{a_2} P \cap T_{a_3} P \subset P$. По лем. 14.1 и сл. 14.5 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ в $\mathbb{P}_3$. Три прямые в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

*$\alpha$-плоскость* $\pi_\alpha(c) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $c \in \mathbb{P}_3$

*$\beta$-плоскость* $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$.

Эти два семейства плоскостей на квадрике $P$ таковы, что любые две плоскости одного типа пересекаются по точке: $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = p\left(\Pi_1 \cap \Pi_2\right)$, $\pi_\alpha(c_1) \cap \pi_\alpha(c_2) = p\big((c_1 c_2)\big)$, а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(c)$ разных типов не пересекаются при $c \notin \Pi$, а при $c \in \Pi$ пересекаются по прямой

$$\lambda(c, \Pi) = \{p(\ell) \in P \mid c \in \ell \subset \Pi\}, \tag{14-46}$$

которая является плюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости $\Pi$ и проходящих через точку $c \in \Pi$. Покажем, что все лежащие на квадрике $P$ прямые имеют вид (14-46). Для этого рассмотрим конус $C = P \cap T_a P$ с вершиной в точке $a \in P$, образованный всеми проходящими через $a$ прямыми, лежащими на $P$, и зафиксируем любое не проходящее через $a$ трёхмерное

[1] См. прим. 14.10 на стр. 240.

проективное подпространство $H \subset T_a P$, см. рис. 14◇1. Пересечение $G = C \cap H$ является гладкой 1-планарной квадрикой в $H$, и любая проходящая через $a$ прямая на $P$ имеет вид $(ab) = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$ для некоторой точки $b \in G$ и плоскостей $\pi_\alpha, \pi_\beta$ натянутых на точку $p$ и пару проходящих через $b$ прямолинейных образующих квадрики $G$.

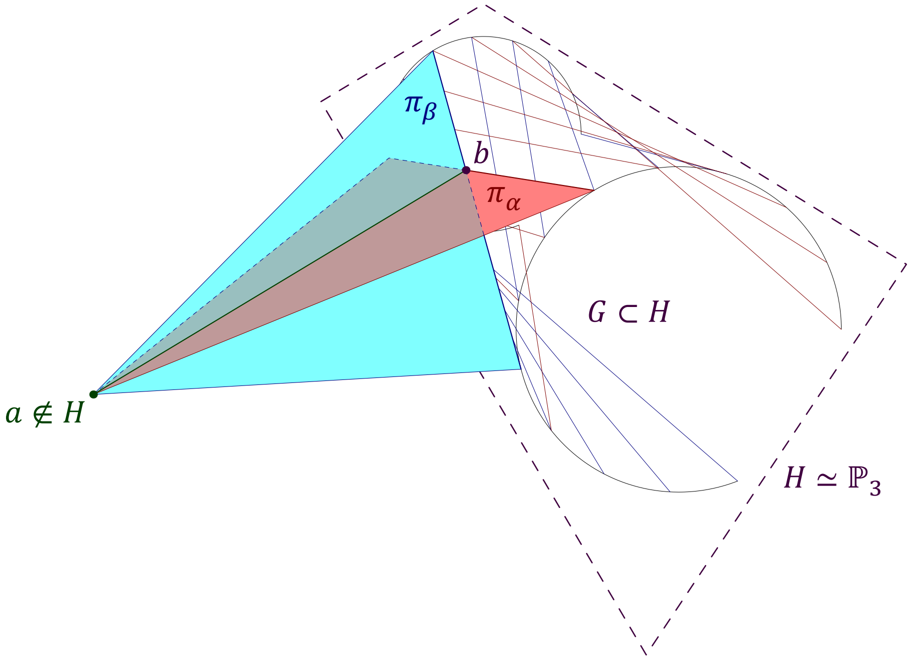


**Рис. 14◇1.** Конус $C = P \cap T_p P$.

Упр. 14.1. Выберем базис $E$ в $U \cap W$, дополним его множествами $E'$ и $E''$ до базисов в $U$ и $W$ соответственно, и зафиксируем в $V$ базис вида $E \sqcup E' \sqcup E'' \sqcup E'''$. Пространство $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ состоит из линейных комбинаций тензорных мономов, составленных из базисных векторов, лежащих в $E$, и стало быть, совпадает с $(U \cap W)^{\otimes n}$.

Упр. 14.2. Это делается дословно также, как в предл. 13.2 на стр. 212.

Упр. 14.3. Каждое линейное отображение $f : V \to C$ в коммутативную $\Bbbk$-алгебру $C$ однозначно поднимается по универсальному свойству тензорной алгебры до гомоморфизма алгебр $\tilde{f} : TV \to C$ по формуле $\tilde{f}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(v_1) \ldots f(v_n)$. Так как в коммутативной алгебре $f(u)f(w) = f(w)f(u)$ для всех $u, w \in V$, гомоморфизм $\tilde{f}$ аннулирует все разности $u \otimes w - w \otimes u$ и пропускается через факторизацию $TV \twoheadrightarrow T/\mathcal{I}_{\text{com}} \simeq SV$. Это доказывает выполнение универсального свойства. То, что $SV$ и $\iota$ однозначно им определяются, устанавливается дословно так же, как в предл. 13.2 на стр. 212.

Упр. 14.4. Для любого отображения множеств $\sigma : E \to C$ единственное отображение $\Bbbk[E] \to C$, совпадающее с $\sigma$ на $E$, является подстановкой в многочлены от переменных $e \in E$ значений $e = \sigma(e) \in C$.

Упр. 14.5. Число целых неотрицательных решений $(m_1, \ldots, m_d)$ уравнения $m_1 + m_2 + \ldots + m_d = n$, равное $\binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{n}$.

Упр. 14.6. Дословно те же аргументы, что и для тензорного умножения, см. предл. 13.2 на стр. 212.

Упр. 14.7. Равенство

$$(\ldots \otimes (u+w) \otimes (u+w) \otimes \ldots) = (\ldots \otimes u \otimes u \otimes \ldots) + (\ldots \otimes w \otimes w \otimes \ldots) + \\ + (\ldots \otimes u \otimes w \otimes \ldots) + (\ldots \otimes w \otimes u \otimes \ldots)$$

показывает, что все суммы (14-7) лежат в $\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}$. При $u = w = v$ сумма (14-7) превращается в $2(\ldots \otimes v \otimes v \otimes \ldots)$. Наконец, по модулю сумм (14-7)

$$\ldots v \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_\ell \otimes v \otimes \ldots \equiv (-1)^\ell (\ldots v \otimes v \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_\ell \ldots) .$$

Упр. 14.8. Это аналогично упр. 14.7.

Упр. 14.9. Дословно те же аргументы, что и для тензорного умножения, см. предл. 13.2 на стр. 212.

Упр. 14.12. Стабилизатор каждого слагаемого состоит из $\prod_{e \in E} m(e)!$ перестановок одинаковых базисных векторов между собою.

Упр. 14.13. Так как сопряжение $\mathrm{Ad}_g : S_n \xrightarrow{\sim} S_n$, $h \mapsto ghg^{-1}$, является биекцией и $\mathrm{sgn}(ghg^{-1}) = \mathrm{sgn}(g)$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{sym}_n \circ g &= \left(\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} h\right) g = \left(\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} ghg^{-1}\right) g = \\
&= \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} gh = g \left(\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} h\right) = g \circ \mathrm{sym}_n \,, \\
\mathrm{alt}_n \circ g &= \left(\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} \mathrm{sgn}(h)\, h\right) g = \left(\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} \mathrm{sgn}(h)\, ghg^{-1}\right) g = \\
&= \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} \mathrm{sgn}(h)\, gh = g \left(\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{h \in S_n} \mathrm{sgn}(h)\, h\right) = g \circ \mathrm{alt}_n \,.
\end{aligned}$$

Упр. 14.14. Выберем в $V$ базис $e_1, \dots, e_d$. Покажите, что $(d^3 - d)/3$ коммутаторов $[[e_i, e_j], e_k]$, где $i < j$ и $i \leqslant k$, составляют базис векторного подпространства $\operatorname{Lie}^3 V \subset V^{\otimes 3}$. Затем убедитесь в том, что линейная оболочка $S^3$-орбиты каждого коммутатора $c = [u, [v, w]]$ является двумерным векторным пространством, на котором группа $S^3$ действует как группа треугольника с вершинами в $c, \tau c, \tau^2 c$, и у этого действия нет инвариантных одномерных подпространств. Из этого вытекает, что линейные оболочки $S^3$-орбит двух коммутаторов $c_1$ и $c_2$ либо совпадают, либо имеют нулевое пересечение. Выведите отсюда, что сумма $S^3$-орбит базисных коммутаторов $[[e_i, e_j], e_k]$ прямая и совпадает с $\operatorname{Lie}^3 V \oplus \tau \operatorname{Lie}^3 V$. Так как последняя сумма содержится в $\operatorname{im} \pi_\Delta$ и $\dim \operatorname{im} \pi_\Delta = d^3 - \dim \operatorname{Sym}^3 V - \dim \operatorname{Alt}^3 V = 2(d^3 - d)/3$, это включение является равенством.

Упр. 14.15. Для каждого $v \in V$ отображение $\operatorname{ad}_v : TV \to TV$, $x \mapsto [v, x] = v \otimes x - x \otimes v$ действует на тензорные произведения по *правилу Лейбница*:

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_v(x \otimes y) &= v \otimes x \otimes y - x \otimes y \otimes v = \\ &= v \otimes x \otimes y - x \otimes v \otimes y + x \otimes v \otimes y - x \otimes y \otimes v = \operatorname{ad}_v(x) \otimes y + x \otimes \operatorname{ad}_v(y) . \end{aligned}$$

Поэтому и на коммутаторы оно тоже действует по правилу Лейбница:

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_v([x, y]) &= \operatorname{ad}_v(x \otimes y - y \otimes x) = \operatorname{ad}_v(x \otimes y) - \operatorname{ad}_v(y \otimes x) = \\ &= \operatorname{ad}_v(x) \otimes y + x \otimes \operatorname{ad}_v(y) - \operatorname{ad}_v(y) \otimes x - y \otimes \operatorname{ad}_v(x) = [\operatorname{ad}_v(x), y] + [x, \operatorname{ad}_v(y)] . \end{aligned}$$

В силу знакопеременности коммутаторов, это равенство переписывается как

$$[v, [x, y]] = [[v, x], y] + [x, [v, y]] = -[y, [v, x]] - [x, [y, v]] ,$$

а это и есть тождество Якоби $[v, [x, y]] + [y, [v, x]] + [x, [y, v]] = 0$.

Упр. 14.16. Переговорите рассуждения из прим. 0.2 на стр. 8.

Упр. 14.17. Первое вытекает из равенств $\operatorname{pl}_u \operatorname{pl}_w f(v) = \tilde{f}\left(u, w, v^{n-1}\right) = \operatorname{pl}_w \operatorname{pl}_u f(v)$. Вторая формула трилинейна по $v, f, g$, и её достаточно проверить для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1}! \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$.

Упр. 14.20. Выберем в $V$ базис $e_1, \dots, e_n$. Если в разложении $\omega$ по базисным мономам есть моном, не содержащий вектора $e_i$, то $e_i \omega \neq 0$.

Упр. 14.23. Билинейность и невырожденность очевидны, симметричность вытекает из того, что однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом. Ненулевые элементы матрицы Грама исчерпываются $q_{12,34} = q_{14,23} = 1$, $q_{13,24} = -1$ и симметричными им.