§15. Комплексные и вещественные векторные пространства

15.1. Овеществление комплексного пространства. Каждое векторное пространство W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ одновременно является векторным пространством и над подполем вещественных чисел $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Когда комплексное векторное пространство W рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$, оно обозначается $W_{\mathbb{R}}$ и называется *овеществлением* комплексного пространства W. Если множество векторов $E \subset W$ является базисом пространства W над $\mathbb{C}$, то множество $E \sqcup iE$, состоящее из векторов e и ie, где $e \in E$, является базисом пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, поскольку существование и единственность представления произвольного вектора $w \in W$ в виде комплексной линейной комбинации

$$w = \sum\nolimits_e z_e e = \sum\nolimits_e (x_e + iy_e)\, e\,, \quad \text{где} \quad z_e = x_e + iy_e \in \mathbb{C}\,,$$

означает в точности существование и единственность линейного выражения

$$w = \sum\nolimits_e x_e e + \sum\nolimits_e y_e\, ie$$

вектора w через векторы e и ie с вещественными коэффициентами $x_e = \operatorname{Re} z_e$, $y_e = \operatorname{Im} z_e$. В частности, $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} W$, где для избежания недоразумений мы здесь и далее пишем $\dim_{\mathbb{R}}$ и $\dim_{\mathbb{C}}$ для обозначения размерности векторных пространств над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Обратите внимание, что вещественные векторные пространства, возникающие как овеществления комплексных, всегда чётномерны.

Комплексно линейные операторы $F : W \to W$ составляют алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ над полем $\mathbb{C}$, а вещественно линейные $G : W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ — алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ над полем $\mathbb{R}$, содержащую алгебру комплексно линейных эндоморфизмов в качестве подалгебры $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$. Сопоставление операторам из $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ и $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ их матриц, соответственно, в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над $\mathbb{C}$ и базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ отождествляет алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ с алгеброй $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера $n \times n$, а алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ — с алгеброй $\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $2n \times 2n$, которые мы будем записывать блочно:

$$G = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \tag{15-1}$$

согласно разбиению базиса $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ на части $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $i\boldsymbol{e} = (ie_1, \dots, ie_n)$.

Предложение 15.1 (условия Коши – Римана)
Вещественно линейный оператор (15-1) тогда и только тогда комплексно линеен, когда $C = -B$ и $D = A$. В базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над $\mathbb{C}$ такой оператор записывается комплексной $n \times n$-матрицей $A + iB$.

Доказательство. Комплексная линейность вещественно линейного оператора $F : W \to W$ равносильна равенству $F(iw) = iF(w)$ для всех $w \in W$, что достаточно проверить на базисных векторах $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Если F имеет матрицу (15-1), то $F(i\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}C + i\boldsymbol{e}D$, а $iF(\boldsymbol{e}) = i(\boldsymbol{e}A + i\boldsymbol{e}B) = -\boldsymbol{e}B + i\boldsymbol{e}A$, откуда $C = -B$, $D = A$ и $F(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}\,(A + iB)$. □

Пример 15.1 (комплексно дифференцируемые функции)
Рассмотрим одномерное комплексное пространство $W = \mathbb{C}$ со стандартным базисным вектором $e = 1$. Его овеществление $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ имеет базис $(e, ie) = (1, i)$. Каждый комплексно линейный

оператор $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является умножением на некое комплексное число $z = a + ib$ и в базисе $(1, i)$ записывается 2×2-матрицей

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Произвольная функция $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w = f(z)$, одной переменной $z \in \mathbb{C}$, представляет собою отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и может быть задана парой вещественных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ от двух вещественных переменных x, y, связанных с комплексными переменными z, w по формулам $w = u + iv$, $z = x + iy$. Функция f называется *комплексно дифференцируемой* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если её приращение как функции от z имеет вид

$$f(z_0 + \vartriangle z) = f(z_0) + \zeta \cdot \vartriangle z + o(\vartriangle z), \text{ где } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Функция f называется *вещественно дифференцируемой*, если

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \\ v(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} + o(\vartriangle x, \vartriangle y), \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Из курса анализа известно, что линейные операторы, описывающие линейную часть приращения, в обоих случаях выражаются через производные:

$$\zeta = f'(z_0) = \lim_{\vartriangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \vartriangle z) - f(z_0)}{\vartriangle z}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{g(x_0 + \vartriangle x, y_0) - g(x_0, y_0)}{\vartriangle x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\vartriangle y \to 0} \frac{g(x_0, y_0 + \vartriangle y) - g(x_0, y_0)}{\vartriangle y}.$$

Из предл. 15.1 вытекает, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно дифференцируемую функцию $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, когда эти функции удовлетворяют дифференциальным *уравнениям Коши–Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

15.2. Комплексификация вещественного пространства. Каждое векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ канонически расширяется до векторного пространства $V_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ над $\mathbb{C}$, которое называется *комплексификацией* пространства V. Умножение разложимого тензора $c \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$ на комплексное число $z \in \mathbb{C}$ задаётся правилом $z\,(c \otimes v) = (zc) \otimes v$, которое корректно продолжается до $\mathbb{R}$-линейного отображения $z: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, $w \mapsto zw$, линейно зависящего от $z \in \mathbb{C}$.

Упражнение 15.1. Убедитесь в этом.

Поскольку числа $1, i \in \mathbb{C}$ составляют базис поля $\mathbb{C}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$, каждый вектор $w \in V_{\mathbb{C}}$ однозначно записывается в виде $w = 1 \otimes u + i \otimes v$, где $u, v \in V$. Векторы вида $1 \otimes v$, где $v \in V$, называются *вещественными* и образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, изоморфное исходному пространству V. Они составляют вещественное векторное подпространство в $V_{\mathbb{C}}$, которое обозначается через $V \subset V_{\mathbb{C}}$. Векторы вида $i \otimes v$, где $v \in V$, называются *чисто мнимыми*. Они тоже образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, также изоморфное исходному пространству V. Рассматриваемое как вещественное векторное подпространство в $V_{\mathbb{C}}$, оно обозначается через $iV \subset V_{\mathbb{C}}$. Таким образом, как векторное пространство над $\mathbb{R}$, пространство $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ является прямой суммой двух копий векторного пространства V. По этой причине векторы $w = 1 \otimes u + i \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$, где $u, v \in V$, обычно записывают как $w = u + iv \in V \oplus iV$, где $u, v \in V$. Векторы $u \in V$ и $iv \in iV$ называются *вещественной* и *мнимой* частями вектора $w \in V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$. В этих обозначениях умножение вектора $w = u + iv$ на комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ задаётся той же формулой

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)\,,$$

что и умножение чисел в поле $\mathbb{C}$. Действительно:

$$(x + iy)(1 \otimes u + i \otimes v) = x \otimes u - y \otimes v + ix \otimes v + iy \otimes u = 1 \otimes (xu - yv) + i \otimes (xv + yu)\,.$$

Каждый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V над полем $\mathbb{R}$, рассматриваемый как набор векторов из вещественного подпространства $V \subset V_{\mathbb{C}}$, является базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$, поскольку единственность представления векторов v_1, $v_2 \in V$ в виде $v_1 = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $v_2 = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ с $x_\nu, y_\nu \in \mathbb{R}$ равносильна единственности представления вектора $w = v_1 + iv_2 \in V \oplus iV$ в виде

$$w = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n\,, \text{ где } z_\nu = x_\nu + iy_\nu \in \mathbb{C}\,.$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

15.2.1. Комплексное сопряжение. На пространстве $V_{\mathbb{C}}$ имеется $\mathbb{R}$-линейная инволюция

$$\sigma :\, V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}\,, \quad w = v_1 + iv_2 \mapsto \overline{w} \stackrel{\text{def}}{=} v_1 - iv_2\,,$$

которая называется *комплексным сопряжением*. По построению, $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$, и вещественные подпространства V и iV являются собственными подпространствами оператора σ с собственными числами $+1$ и -1 соответственно. По отношению к умножению на комплексные числа инволюция *σ полулинейна*, т. е. удовлетворяет для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w \in V_{\mathbb{C}}$ соотношению $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$.

15.2.2. Комплексификация операторов. Каждый $\mathbb{R}$-линейный оператор $F :\, V' \to V''$ между вещественными векторными пространствами продолжается до $\mathbb{C}$-линейного оператора

$$F_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} F :\, V'_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V' \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V'' = V''_{\mathbb{C}}$$

который называется *комплексификацией* оператора F и действует по правилу

$$F_{\mathbb{C}}(u + iv) = F(u) + iF(v)\,, \text{ где } u + iv \in V' \oplus iV' = V'_{\mathbb{C}}\,,$$

ибо $Id \otimes F\, (1 \otimes u + i \otimes v) = 1 \otimes Fu + i \otimes Fv = Fu + iFv$. Оператор $F_{\mathbb{C}}$ коммутирует с комплексным сопряжением: для каждого $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$ выполняются равенства

$$\overline{F_{\mathbb{C}} w} = \overline{F_{\mathbb{C}}(u + iFv)} = \overline{Fu + iFv} = Fu - iFv = F_{\mathbb{C}}(u - iv) = F(\overline{w})\,. \tag{15-2}$$

В частности, вектор $w \in V_{\mathbb{C}}$ является собственным для оператора $F_{\mathbb{C}}$ с собственным числом $\lambda \in \mathbb{C}$ если и только если сопряжённый вектор $\overline{w}$ собственный для $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжённым собственным числом $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$: равенства $Fw = \lambda w$ и $F\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$ равносильны, ибо согласно (15-2) получаются друг из друга комплексным сопряжением.

Предложение 15.2
Комплексная линейная оболочка $W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(w, \overline{w}) \subset V_{\mathbb{C}}$ пары сопряжённых собственных векторов $w = v_1 + iv_2$ и $\overline{w} = v_1 - iv_2$ оператора $F_{\mathbb{C}} :\, V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ с сопряжёнными собственными числами

$\lambda = a + ib$ и $\overline{\lambda} = a - ib$ является комплексификацией вещественного инвариантного подпространства $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset V$ оператора $F : V \to V$, и ограничение $F|_U : U \to U$ имеет в образующих (v_1, v_2) матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{15-3}$$

Доказательство. Равенство $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2)$ означает, что

$$F(v_1) + iF(v_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2),$$

откуда $F(v_1) = av_1 - bv_2$, $F(v_2) = bv_1 + av_2$. Тем самым, оператор F переводит вещественное подпространство $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$ в себя и его ограничение на U имеет в образующих (v_1, v_2) матрицу (15-3). Комплексификация $U_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(v_1, v_2)$ содержит векторы $w = v_1 + iv_2$ и $\overline{w} = v_1 - iv_2$. Она линейно порождается этими векторами над $\mathbb{C}$, так как $v_1 = (w + \overline{w})/2$, а $v_2 = (w - \overline{w})/2i$. □

Следствие 15.1 (Ср. с прим. 9.5)
Каждый $\mathbb{R}$-линейный оператор на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством. □

Замечание 15.1. Для вещественного собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ предл. 15.2 утверждает, что все комплексные собственные векторы оператора $F_{\mathbb{C}}$ лежат в комплексификации $\mathbb{C} \otimes V_\lambda \subset V_{\mathbb{C}}$ вещественного собственного подпространства $V_\lambda \subset V$ оператора F. Так как при $u, w \in V$ равенство $F_{\mathbb{C}}(u + iw) = Fu + iFw = \lambda(u + iw)$ равносильно равенствам $Fu = \lambda u$, $Fw = \lambda w$, мы заключаем, что отвечающее вещественному собственному числу λ собственное подпространство оператора $F_{\mathbb{C}}$ совпадает с $\mathbb{C} \otimes V_\lambda$.

Замечание 15.2. В любом вещественном базисе $e_1, \dots, e_n \in V$ пространства $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$ операторы F и $F_{\mathbb{C}}$ имеют одну и ту же вещественную матрицу. Поэтому их характеристические многочлены одинаковы и имеют вещественные коэффициенты: $\chi_F(t) = \chi_{F_{\mathbb{C}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$. В частности, невещественные собственные числа оператора $F_{\mathbb{C}}$ разбиваются на пары комплексно сопряжённых, имеющих одинаковые кратности, что согласуется с предл. 15.2.

Идущее ниже предл. 15.3 утверждает, что разбиение на комплексно сопряжённые пары имеет место для всех невещественных элементарных делителей оператора $F_{\mathbb{C}}$. Напомню, что по теор. 9.1 на стр. 144 каждый вещественно линейный оператор F подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец вида $\mathbb{R}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ и $\mathbb{R}[t]/\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)$, где $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ и $b^2 < a$.

Предложение 15.3
Каждый элементарный делитель вида $(t - \lambda)^m$ оператора F является элементарным делителем оператора $F_{\mathbb{C}}$, а каждому элементарному делителю вида $(t^2 - 2bt + a)^m$ с $b^2 < a$ оператора F отвечают два сопряжённых элементарных делителя $(t-\mu)^m$ и $(t-\overline{\mu})^m$, где $\mu = b + i\sqrt{a - b^2} \in \mathbb{C}$, оператора $F_{\mathbb{C}}$, и никаких других элементарных делителей у $F_{\mathbb{C}}$ нет.

Доказательство. Из прим. 13.8 на стр. 221 вытекает, что в условиях предложения

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{\big((t-\lambda)^m\big)} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\lambda)^m\big)} \quad \text{и} \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\mu)^m\big)} \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\overline{\mu})^m\big)}.$$

Поэтому оператор $F_{\mathbb{C}}$ подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец, полученной заменой каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ слагаемым $\mathbb{C}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$, а каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/\big((t^2-2bt+a)^m\big)$ — суммой $\mathbb{C}[t]/\big((t-\mu)^m\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t-\overline{\mu})^m\big)$. □

Следствие 15.2
Для каждого вещественного собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$ комплексификации

$$\mathbb{C}\otimes V_\lambda,\ \mathbb{C}\otimes K_\lambda \subset \mathbb{C}\otimes V$$

собственного и корневого подпространств $V_\lambda, K_\lambda \subset V$ оператора F являются, соответственно, собственным и корневым подпространствами оператора $F_{\mathbb{C}}$. □

Следствие 15.3
Для каждого невещественного собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec}(F_{\mathbb{C}})$ комплексное сопряжение

$$V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{C}}\,, \quad w \mapsto \overline{w}\,,$$

задаёт $\mathbb{C}$-полулинейные изоморфизмы $K_\lambda \xrightarrow{\sim} K_{\overline{\lambda}} = \overline{K}_\lambda$ и $V_\lambda \xrightarrow{\sim} V_{\overline{\lambda}} = \overline{V}_\lambda$ между корневыми и собственными подпространствами оператора $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжёнными собственными числами λ и $\overline{\lambda}$, а прямые суммы $K_\lambda \oplus K_{\overline{\lambda}}$ и $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$ являются комплексификациями вещественных F-инвариантных подпространств оператора F. □

15.2.3. Комплексификация билинейной формы. Точно также как и линейный оператор, каждую вещественно билинейную форму $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ можно продолжить до *комплексно билинейной* формы $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, значения которой на векторах $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ вычисляются по правилу

$$\beta_{\mathbb{C}}(u_1+iv_1, u_2+iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1,u_2)-\beta(v_1,v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1,v_2)+\beta(v_1,u_2)\big)\,.$$

Упражнение 15.2. Покажите, что $\mathbb{C}$-билинейное продолжение $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$-билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е. $\overline{\beta_{\mathbb{C}}(w_1,w_2)} = \beta_{\mathbb{C}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$.

Матрица Грама формы $\beta_{\mathbb{C}}$ в любом вещественном базисе пространства $V_{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей Грама формы β в том же базисе. Если форма β симметрична или кососимметрична, то такова же и её комплексификация $\beta_{\mathbb{C}}$. Обратите внимание, что классифицирующий вещественные симметричные билинейные формы инвариант — сигнатура[1] — после комплексификации утрачивается, поскольку все комплексно билинейные формы заданного ранга изометрически изоморфны[2] друг другу над полем $\mathbb{C}$. В частности, $\mathbb{C}$-билинейная комплексификация евклидова скалярного произведения представляет собою невырожденную форму, имеющую комплексные изотропные подпространства[3] размерности $[\dim V/2]$.

[1]См. раздел 14.5 на стр. 190 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

[2]См. следствие 13.1 на стр. 181 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf.

[3]См. раздел 13.2.2 на стр. 174 той же лекции.

15.2.4. Полуторалинейное продолжение билинейной формы. В метрической геометрии вместо $\mathbb{C}$-билинейного продолжения вещественной билинейной формы $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ на комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V обычно используется *полуторалинейное* или *эрмитово* продолжение $\beta_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, которое $\mathbb{C}$-линейно по первому аргументу и полулинейно[1] по второму. Это означает, что $\beta_{\mathrm{H}}(zw_1, w_2) = z\beta_{\mathrm{H}}(w_1, w_2)$, но $\beta_{\mathrm{H}}(w_1, zw_2) = \overline{z}\beta_{\mathrm{H}}(w_1, w_2)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$. Значение такой формы на векторах $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ равно

$$\beta_{\mathrm{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)\big)\,. \tag{15-4}$$

Упражнение 15.3. Покажите, что полуторалинейное продолжение $\beta_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$-билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е. $\overline{\beta_{\mathrm{H}}(w_1, w_2)} = \beta_{\mathrm{H}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$.

Если $\mathbb{R}$-билинейная форма $g : V \times V \to \mathbb{R}$ симметрична, то вещественная часть её эрмитова продолжения $\operatorname{Re} g_{\mathrm{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(u_1, u_2) + g(v_1, v_2)$ является симметричной $\mathbb{R}$-билинейной формой $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, а мнимая часть $\operatorname{Im} g_{\mathrm{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(v_1, u_2) - g(u_1, v_2)$ кососимметрична. Поэтому эрмитово продолжение симметричной формы при перестановке аргументов сопрягается: $g_{\mathrm{H}}(w_2, w_1) = \overline{g_{\mathrm{H}}(w_1, w_2)}$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$. Это свойство называют *эрмитовой симметричностью*. В частности, эрмитов скалярный квадрат любого вектора веществен: $g_{\mathrm{H}}(w, w) = \overline{g_{\mathrm{H}}(w, w)} \in \mathbb{R}$ для всех $w \in V_{\mathbb{C}}$.

Если $\mathbb{R}$-билинейная форма $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ кососимметрична, то наоборот $\mathbb{R}$-билинейная форма $\operatorname{Re} \omega_{\mathrm{H}}$ кососимметрична, а $\operatorname{Im} \omega_{\mathrm{H}}$ симметрична. Поэтому скалярные квадраты всех векторов относительно эрмитово продолженной формы ω_{H} чисто мнимы: для всех $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$

$$\omega_{\mathrm{H}}(w, w) = 2i\,\omega(u, v) \in i\mathbb{R}\,.$$

Пример 15.2 (эрмитово продолжение евклидовой структуры)
Рассмотрим вещественное векторное пространство V с евклидовым скалярным произведением[2] $(\,*\,,\,*\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ и его эрмитово продолжение $(\,*\,,\,*\,)_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ на комплексификацию $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ пространства V. Форма $(\,*\,,\,*\,)_{\mathrm{H}}$ эрмитово симметрична, вещественно билинейна, комплексно полуторалинейна и *положительна* в том смысле, что $(w, w)_{\mathrm{H}} > 0$ для всех ненулевых $w \in V_{\mathbb{C}}$. Абстрактное комплексное векторное пространство W, оснащённое формой $(\,*\,,\,*\,) : W \times W \to \mathbb{C}$ с такими свойствами, называется *эрмитовым*, а сама форма — *эрмитовым скалярным произведением* или *эрмитовой структурой* на W.

Например, комплексификацией вещественного координатного пространства $V = \mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой структурой $(x, y) = \sum x_\nu y_\nu$ является комплексное координатное пространство $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ с эрмитовой структурой $(z, w)_{\mathrm{H}} = \sum z_\nu \overline{w}_\nu$, которая называется *стандартной* эрмитовой структурой на $\mathbb{C}^n$.

Аналогично, комплексификацией пространства $C^0([a, b], \mathbb{R})$ вещественных непрерывных функций на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с евклидовым скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{15-5}$$

[1] См. раздел 2.1.3 на стр. 23 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_02.pdf.

[2] См. определение 3.1 на стр. 33 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf.

является пространство $C^0([a,b],\mathbb{C})$ непрерывных функций $[a,b]\to\mathbb{C}$ с эрмитовой структурой

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx\,, \tag{15-6}$$

где под интегралом от комплекснозначной функции f по определению понимается комплексное число

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx+i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx\,,$$

действительная и мнимая части которого равны интегралам от вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f,\operatorname{Im} f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ функции f.

15.3. Эрмитовы пространства. Векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если на нём задана полуторалинейная эрмитово симметричная положительная форма[1]

$$(\,*\,,\,*\,):\ W\times W\to\mathbb{C}\,, \tag{15-7}$$

где *полуторалинейность* означает, что $z\,(u,w)=(zu,w)=(u,\overline{z}w)$ для всех $u,w\in W$ и $z\in\mathbb{C}$, эрмитова симметричность — что $(u,w)=\overline{(w,u)}$ для всех $u,w\in W$, а положительность — что вещественное число $(v,v)=\overline{(v,v)}$ положительно для всех ненулевых $v\in W$. Выше мы видели, что комплексификация любого вещественного евклидова пространства имеет каноническую эрмитову структуру, задаваемую полуторалинейным продолжением евклидова скалярного произведения. Выясним, что означает эрмитовость с точки зрения вещественного пространства $W_{\mathbb{R}}$.

На эрмитовом пространстве W с полуторалинейным скалярным произведением (15-7) имеются две вещественных билинейных формы $g,\omega:\ W_{\mathbb{R}}\times W_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$, равные соответственно вещественной и мнимой части эрмитова скалярного произведения:

$$g(u,w)\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Re}(u,w)\quad\text{и}\quad\omega(u,w)\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Im}(u,w)\,. \tag{15-8}$$

Эрмитова симметричность комплекснозначной формы $(u,w)=g(u,w)+i\omega(u,w)$ равносильна симметричности формы g и кососимметричности формы ω. Положительность формы (u,w) влечёт положительность формы g, которая таким образом задаёт евклидову структуру на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$. Равенство

$$(u,iw)=-i(u,w)$$

равносильно паре равенств $g(u,iw)=\omega(u,w)$ и $\omega(u,iw)=-g(u,w)$, превращающихся друг в друга при замене w на iw. На языке матриц первое из этих равенств означает, что записанные в произвольном базисе пространства $W_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G,Ω форм g,ω и матрица оператора $I:\ W_{\mathbb{R}}\to W_{\mathbb{R}}$, $w\mapsto iw$, связаны соотношением $GI=\Omega$, из которого вытекает, в частности, что $\det\Omega\neq 0$, т. е. форма ω невырождена и задаёт на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$ симплектическую структуру.

Наоборот, пусть на вещественном векторном пространстве V заданы

- евклидова структура[2] $g:\ V\times V\to\mathbb{R}$

[1] Любая такая форма называется *эрмитовой структурой* на комплексном пространстве W.

[2] Т. е. симметричная положительно определённая $\mathbb{R}$-билинейная форма.

- симплектическая структура[1] $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$-линейный эндоморфизм $I : V \to V$ с квадратом $I^2 = -\mathrm{Id}_V$.

Оператор I с таким свойством называется *комплексной структурой* на вещественном векторном пространстве V, поскольку позволяет определить умножение векторов $v \in V$ на комплексные числа $z = x + iy \in \mathbb{C}$ формулой

$$(x + iy)\, v \overset{\text{def}}{=} x\, v + y\, I(v)\,. \tag{15-9}$$

Упражнение 15.4. Убедитесь, что эта формула задаёт на V структуру векторного пространства над полем $\mathbb{C}$, и выведите отсюда, что вещественная размерность $\dim_{\mathbb{R}} V$ чётна.

Рассмотрим V как комплексное векторное пространство и обозначим через

$$(\,*\,,\,*\,) : V \times V \to \mathbb{C}$$

вещественно билинейную форму, сопоставляющую векторам $u, w \in V$ комплексное число

$$(u, w) \overset{\text{def}}{=} g(u, w) + i\omega(u, w) \tag{15-10}$$

Упражнение 15.5. Убедитесь, что эта форма вещественно билинейна, эрмитово симметрична и положительна.

Данные (I, g, ω) называются *кэлеровой тройкой*, если они удовлетворяют лем. 15.1 ниже.

Лемма 15.1

Следующие свойства тройки (I, g, ω) эквивалентны друг другу:

1) форма (15-10) задаёт на комплексном векторном пространстве V эрмитову структуру
2) форма (15-10) $\mathbb{C}$-линейна по первому аргументу
3) форма (15-10) $\mathbb{C}$-полулинейна по второму аргументу
4) $g(u, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$
5) $\omega(u, Iw) = -g(u, w)$ для всех $u, w \in V$
6) записанные в одном базисе пространства V над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G, Ω форм g, ω и матрица оператора I связаны равенством $GI = \Omega$.

Доказательство. Равенство $(Iu, w) = i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(Iu, w) = -\omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(Iu, w) = g(u, w)\,,$$

переходящих друг в друга при замене u на Iu, так как $I^2 = -\mathrm{Id}$. Равенство $(u, Iw) = -i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(u, Iw) = \omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, Iw) = -g(u, w)\,,$$

переходящих друг в друга при замене w на Iw. В силу симметричности g и кососимметричности ω выполнение для всех $u, w \in V$ первой пары равенств эквивалентно выполнению второй. Это доказывает эквивалентность первых пяти свойств. Условие (6) является матричной записью условия (4). □

[1] Т. е. невырожденная кососимметричная $\mathbb{R}$-билинейная форма.

Следствие 15.4
Задание эрмитовой структуры на комплексном векторном пространстве эквивалентно заданию кэлеровой тройки на его овеществлении. □

Следствие 15.5
Любые два элемента кэлеровой тройки (I, g, ω) однозначно задают третий.

Доказательство. Это вытекает из свойства (6) и обратимости матриц I, G, Ω. □

Следствие 15.6
Оператор I в кэлеровой тройке (I, g, ω) одновременно является ортогональным для g и симплектическим для ω, т. е. $g(Iu, Iw) = g(u, w)$ и $\omega(Iu, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$.

Доказательство. Из (1) вытекает, что $(Iu, Iw) = (u, w)$. Сравнивая вещественную и мнимую части, получаем требуемое. □

15.3.1. Эрмитова норма вектора. Вещественное число

$$\|w\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(w, w)} = \sqrt{g(w, w)} \tag{15-11}$$

называется *эрмитовой нормой* или *длиной* вектора $w \in W$. Обратите внимание, что эрмитова длина совпадает с евклидовой длиной вектора w относительно вещественного евклидова скалярного произведения g на $W_{\mathbb{R}}$. Эрмитово скалярное произведение $W \times W \to \mathbb{C}$ однозначно восстанавливается по функции длины $W \to \mathbb{R}$, поскольку

$$2\,\mathrm{Re}(w_1, w_2) = (w_1, w_2) + \overline{(w_1, w_2)} = (w_1, w_2) + (w_2, w_1) = \|w_1 + w_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2$$
$$2i\,\mathrm{Im}(w_1, w_2) = (w_1, w_2) - \overline{(w_1, w_2)} = (w_1, w_2) - (w_2, w_1) = -i\left(\|w_1 + iw_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2\right)$$

в силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения.

15.3.2. Матрицы Грама. На матричном языке эрмитова симметричность скалярного произведения означает, что матрица Грама[1] $G_{\boldsymbol{w}} = \big((w_i, w_j)\big) = \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{w}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ транспонирована своей комплексно сопряжённой: $G_{\boldsymbol{w}}^t = \overline{G}_{\boldsymbol{w}}$. Комплексные матрицы с таким свойством называются *эрмитовыми* или *эрмитово симметричными*. Так как эрмитово скалярное произведение полулинейно по второму аргументу, при линейной замене векторов по формуле $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\, C_{\boldsymbol{uw}}$ матрица Грама меняется по правилу

$$G_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^t \boldsymbol{w} = C_{\boldsymbol{uw}}^t \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}\, \overline{C}_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uw}}^t G_{\boldsymbol{u}} \overline{C}_{\boldsymbol{uw}}\,.$$

Определение 15.1
Набор векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в эрмитовом пространстве W называется *ортонормальным* если его матрица Грама $G_{\boldsymbol{e}}$ единичная, т. е. когда все векторы попарно ортогональны друг другу и имеют единичную длину.

Предложение 15.4 (ортогонализация Грама – Шмидта)
В $\mathbb{C}$-линейной оболочке любого набора ненулевых векторов $w_1, \dots, w_m$ эрмитова пространства W имеется такой ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$, что при каждом k линейная оболочка векторов $w_1, \dots, w_k$ содержится в линейной оболочке векторов $e_1, \dots, e_k$.

[1]Здесь и далее при перемножении матриц, элементами которых являются векторы пространства W, мы считаем, что $u \cdot w \overset{\text{def}}{=} (u, w) \in \mathbb{C}$. Таким образом, произведение двух матриц из векторов является матрицей из комплексных чисел. Ср. с n° 5.3.1 на стр. 95.

Доказательство. В качестве первого вектора искомого базиса возьмём $e_1 = w_1/\|w_1\|$. Пусть для векторов $w_1, \dots, w_k$ уже построены такие ортонормальные векторы $e_1, \dots, e_i$, что $i \leqslant k$ и

$$\operatorname{span}(e_1, \dots, e_i) = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k)\,. \tag{15-12}$$

Положим $v_{i+1} = w_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{i}(w_{k+1}, e_\nu)\cdot e_\nu$. Так как для каждого из уже построенных векторов e_j выполняется равенство $(v_{i+1}, e_j) = (v_{k+1}, e_j) - (v_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$, вектор v_{i+1} ортогонален подпространству (15-12). Если $v_{i+1} = 0$, то вектор w_{k+1} лежит в подпространстве (15-12) и набор $w_1, \dots, w_k$ можно увеличить до набора $w_1, \dots, w_{k+1}$. Если $v_{i+1} \neq 0$, добавляем к векторам $e_1, \dots, e_i$ вектор $e_{i+1} = v_{i+1}/\|v_{i+1}\|$ и заключаем, что $\operatorname{span}(e_1, \dots, e_{i+1}) = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_{k+1})$. □

Замечание 15.3. Описанный в доказательстве предл. 15.4 индуктивный способ построения ортонормального базиса называется *ортогонализацей Грама – Шмидта*.

Следствие 15.7
Определитель Грама $\det G_{\boldsymbol{w}}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль если и только если $\boldsymbol{w}$ линейно зависим.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ew}}$, где $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормальный базис в $\operatorname{span} \boldsymbol{w}$. Тогда $G_{\boldsymbol{w}} = C_{\boldsymbol{ew}}^t \overline{C}_{\boldsymbol{ew}}$. Если $n < m$, то ранг матрицы $G_{\boldsymbol{w}}$ строго меньше её размера, и $\det G_{\boldsymbol{w}} = 0$. Если $n = m$, то $\det G_{\boldsymbol{w}} = \det C_{\boldsymbol{ew}} \cdot \overline{\det C_{\boldsymbol{ew}}} = |\det C_{\boldsymbol{ew}}|^2 > 0$. □

15.3.3. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Неотрицательность определителя Грама любой пары векторов $v, w \in W$

$$\det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = \|v\|^2\|w\|^2 - (v,w)\cdot\overline{(v,w)} \geqslant 0$$

переписывается как эрмитова версия евклидова неравенства Коши – Буняковского – Шварца[1]

$$|(v,w)| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|\,, \tag{15-13}$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов v и w над полем $\mathbb{C}$.

Следствие 15.8 (неравенство треугольника для эрмитовой нормы)
$\|w_1\| + \|w_2\| \geqslant \|w_1 + w_2\|$ для всех $w_1, w_2 \in W$.

Доказательство. $\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\,|(w_1, w_2)| \leqslant \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\|w_1\|\cdot\|w_2\| = \left(\|w_1\| + \|w_2\right)^2$. □

15.3.4. Унитарная группа. Линейный оператор $F : W \to W$ на эрмитовом пространстве W называется *унитарным*, если $\|Fw\| = \|w\|$ для всех $w \in W$. Так как эрмитово скалярное произведение однозначно выражается через длину[2], каждый унитарный оператор F сохраняет скалярное произведение:

$$(Fv, Fw) = (v, w) \quad \forall\, v, w \in W\,.$$

[1]См. следствие 3.1 на стр. 34 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf.

[2]См. n° 15.3.1 на стр. 254.

Поэтому матрица унитарного оператора в любом базисе связана с матрицей Грама этого базиса соотношением

$$F^t G \overline{F} = G\,. \tag{15-14}$$

Беря определители, заключаем, что $|\det F| = 1$. В частности, каждый унитарный оператор F обратим, и $F^{-1} = \overline{G}^{-1}\overline{F}^t\overline{G} = G^{t^{-1}}\overline{F}^t G^t$. В ортонормальном базисе эта формула редуцируется до

$$F^{-1} = \overline{F}^t\,. \tag{15-15}$$

Матрицы с таким свойством называются *унитарными*. Унитарные операторы на эрмитовом пространстве W образуют группу, которая обозначается $\mathrm{U}(W)$ и называется *унитарной группой* пространства W. Запись унитарных операторов матрицами в фиксированном ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W, задаёт изоморфизм унитарной группы с группой *унитарных матриц*

$$\mathrm{U}_n = \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \overline{F}^t\}\,.$$

Её подгруппа $\mathrm{SU}_n = \{F \in \mathrm{U}_n \mid \det F = 1\}$, состоящая из матриц определителя 1, называется *специальной* унитарной группой. Обратите внимание, что в отличие от вещественных ортогональных матриц определитель унитарной матрицы может принимать любое значение на единичной окружности

$$\mathrm{U}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\}\,.$$

15.3.5. Эрмитов объём. Зафиксируем в эрмитовом пространстве W какой-нибудь ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$ в качестве базиса единичного объёма и определим *эрмитов объём n-мерного параллелепипеда*, натянутого на векторы $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\,C_{ev}$ формулой

$$\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} |\det C_{ev}|\,.$$

Так как абсолютная величина определителя унитарной матрицы перехода между любыми двумя ортонормальными базисами равна единице, эрмитов объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, а квадрат эрмитова объёма, как и в евклидовом случае, равен абсолютной величине определителя Грама:

$$\mathrm{Vol}^2(v_1, \dots, v_n) = |\det C_{ev}|^2 = \det C_{ev}^t \cdot \overline{\det C}_{ev} = \det(C_{ev}^t \overline{\det C}_{ev}) = |\det G_v|\,.$$

15.3.6. Эрмитова двойственность. В силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения каждый вектор w эрмитова пространства W задаёт полулинейно зависящий от w комплексно линейный функционал $h_w : W \to \mathbb{C}$, $u \mapsto (u, v)$, правого скалярного умножения на w. Полулинейное отображение

$$h : W \to W^*\,, \quad w \mapsto h_w\,, \tag{15-16}$$

называется *эрмитовой корреляцией*. Оно инъективно, поскольку $h_w(w) = (w, w) \neq 0$ для ненулевого w в силу положительности эрмитовой формы. Так как пространства W и W^* имеют одинаковую размерность над $\mathbb{C}$, их овеществления имеют одинаковую размерность над $\mathbb{R}$. Поэтому отображение (15-16) является вещественно линейным комплексно полулинейным изоморфизмом векторных пространств. Это означает, что для любого $\mathbb{C}$-линейного функционала $\varphi : W \to \mathbb{C}$ существует единственный такой вектор $u \in W$, что $\varphi(w) = (w, u)$ для всех $w \in W$, причём этот вектор $\mathbb{C}$-полулинейно зависит от φ.

В частности, у любого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ эрмитова пространстве W имеется *эрмитово двойственный* базис $\boldsymbol{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$, состоящий из прообразов $u_i^\times \overset{\text{def}}{=} h^{-1}(u_i^*)$ ковекторов двойственного к $\boldsymbol{u}$ базиса $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ в W^* и однозначно задаваемый соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j\,. \end{cases} \tag{15-17}$$

На матричном языке эти соотношения означают, что $\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}^\times = E$. Поэтому матрица $C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, линейно выражающая базис $\boldsymbol{u}^\times$ через базис $\boldsymbol{u}$ по формуле $\boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u} C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, удовлетворяет равенству

$$E = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}\, \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}\,,$$

откуда $(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n)\, \overline{G}_{\boldsymbol{u}}^{-1}$.

Упражнение 15.6. Убедитесь, что $u_i^{\times\times} = u_i$ для любого базиса $u_1, \dots, u_n$.

Ортонормальность базиса означает, что он совпадает со своим эрмитово двойственным.

Так как i-я координата любого вектора $w \in W$ в базисе $\boldsymbol{u}$ равна $u_i^*(w) = (w, u_i^\times)$, разложение вектора w по любому базису $\boldsymbol{u}$ имеет вид

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times)\,. \tag{15-18}$$

15.3.7. Ортогонал и ортогональная проекция. В эрмитовом пространстве W у любого подпространства $U \subset W$ имеется выделенное дополнительное подпространство

$$U^\perp = \{w \in W \mid \forall\, u \in U\ (u, w) = 0\} = \{w \in W \mid \forall\, u \in U\ (w, u) = 0\}\,,$$

которое называется *ортогоналом* к U. Каждый вектор $w \in W$ задаёт линейный функционал

$$h_w : U \to \mathbb{C}\,, \quad u \mapsto (u, w)\,.$$

Как мы видели выше, существует единственный такой вектор $w_U \in U$, что $(u, w) = (u, w_U)$ для всех $u \in U$. Разность $w_{U^\perp} \overset{\text{def}}{=} w - w_U$ лежит в $U^\perp$, так $(u, w_{U^\perp}) = (u, w) - (u, w_U) = 0$ для всех $u \in U$. Полученное нами разложение $w = w_U + w_{U^\perp}$, в котором $w_U \in U$, а $w_{U^\perp} \in U^\perp$, единственно, так как для любого такого разложения и всех $u \in U$ выполняются равенства $(u, w) = (u, w_U)$, однозначно задающие вектор $w_U \in U$. Таким образом, $W = U \oplus U^\perp$.

Комплексно линейный оператор $\pi_U : W \to W$, $w \mapsto w_U$, проектирующий W на U вдоль $U^\perp$ называется *ортогональным проектором*. Так как для любой пары эрмитово двойственных базисов $u_1, \dots, u_m$ и $u_1^\times, \dots, u_m^\times$ подпространства U выполняются равенства

$$w_U = \sum\nolimits_i (w_U, u_i^\times)\, u_i = \sum\nolimits_i \overline{(u_i^\times, w_U)}\, u_i = \sum\nolimits_i \overline{(u_i^\times, w)}\, u_i = \sum\nolimits_i (w, u_i^\times)\, u_i\,,$$

координатами ортогональной проекции w_U вектора w на U в любом базисе $u_1, \dots, u_m$ подпространства U являются скалярные произведения $(w, u_i^\times)$ вектора w с векторами эрмитово двойственного базиса.

Иначе ортогональная проекция w_U вектора w на U описывается как единственный вектор из U, на котором (нелинейный) функционал $U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u - w\|$, расстояния до вектора w достигает своего абсолютного минимума на U. В самом деле, для всех $v \in U$

$$\|w - (w_U + v)\|^2 = \big((w - w_U) - v, (w - w_U) - v\big) = \|w - w_U\|^2 + \|v\|^2 \geqslant \|w - w_U\|^2\,,$$

и равенство равносильно тому, что $v = 0$.

15.3.8. Угол между комплексными прямыми. В евклидовом пространстве угол

$$\measuredangle(L_1, L_2) \in [0, \pi/2]$$

между вещественными прямыми $L_1 = \mathbb{R}\,u$ и $L_2 = \mathbb{R}\,w$ с направляющими векторами u, w определялся равенством[1]

$$\cos\measuredangle(L_1, L_2) = \frac{|(u,w)|}{\|u\|\cdot\|w\|} = (u/\|u\|, w/\|w\|)\,, \tag{15-19}$$

правая часть которого лежит на отрезке $[0,1]$ в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца. Направляющие векторы единичной длины $u/\|u\|$ и $w/\|w\|$ на каждой прямой единственны с точностью до умножения на ± 1. Пересекающиеся прямые L_1, L_2 разбивают натянутую на них вещественную плоскость на две пары смежных вертикальных углов. Формула (15-19) вычисляет косинус наименьшего из них.

В эрмитовом пространстве W комплексные прямые $L_1 = \mathbb{C}\,u$, $L_2 = \mathbb{C}\,w$ представляют собою двумерные вещественные плоскости в овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$, пересекающиеся в единственной точке $0 \in W$. Линейная оболочка этих плоскостей $V = (L_1 \oplus L_2)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^4$ является четырёхмерным вещественным пространством. Базисные векторы единичной длины заметают в каждой плоскости L_i единичную окружность с центром в нуле. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной вещественной трёхмерной сфере $S^3 = \{\, v \in V \mid \|v\| = 1\}$. Поэтому евклидов угол между векторами $e_1 \in L_1$ и $e_2 \in L_2$ длины 1 ограничен и достигает своего минимального значения на некоторой паре векторов e_1, e_2. Евклидов угол $\measuredangle(e_1, e_2)$ между этими векторами называется *эрмитовым углом* между комплексными прямыми L_1 и L_2 и обозначается $\measuredangle(L_1, L_2)$. Покажем, что он вычисляется по той же самой формуле (15-19), что и в евклидовом пространстве.

Пусть векторы $u \in L_1$ и $w \in L_2$ имеют длину 1. При умножении этих векторов на комплексные числа единичной длины $|(u,w)|$ не меняется. Поэтому правая часть формулы (15-19) и сумма[2] $g^2(u,w) + \omega^2(u,w) = |(u,w)|^2$ не зависят от выбора векторов u и w на единичных окружностях в L_1 и L_2. Максимальное значение $\cos^2\measuredangle(u,w) = g^2(u,w)$ получается при минимальном значении $\omega^2(u,w)$, которое достигается и равно нулю, поскольку трёхмерное в силу невырожденности формы ω вещественное подпространство $u_\omega^\perp = \{v \in V \mid \omega(u,v) = 0\}$ имеет в четырёхмерном пространстве V ненулевое пересечение с двумерным подпространством L_2. Таким образом, для каждого вектора $u \in L_1$ длины 1 существует такой вектор $w \in L_2$ длины 1, что $\omega^2(u,w) = 0$, а $g^2(u,w) = |(u,w)|^2$ максимально возможное. Для этих векторов формула (15-19) выдаёт минимально возможный евклидов угол между вещественными прямыми $\mathbb{R}\,u$ и $\mathbb{R}\,w$ в евклидовой структуре, задаваемой формой g.

[1] См. раздел 10.4.2 на стр. 137 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

[2] Напомню, что $g(u,w) = \mathrm{Re}(u,w)$, а $\omega(u,w) = \mathrm{Im}(u,w)$, см. (15-8).

Упр. 15.1. Тензор $(zc) \otimes v \in \mathbb{C} \otimes V$ трилинеен по $z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, $v \in V$.

Упр. 15.2. Пусть $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{\beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)} &= \beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = \overline{\big(\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)\big)} = \\ &= \big(\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)\big) - i\,\big(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)\big) = \beta_{\mathbb{C}}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta_{\mathbb{C}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)\,.\end{aligned}$$

Упр. 15.3. Пусть $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{\beta\mathrm{H}(w_1, w_2)} &= \beta\mathrm{H}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = \overline{\big(\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)\big) + i\,\big(\beta(v_1, u_2) - \beta(u_1, v_2)\big)} = \\ &= \big(\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)\big) = \beta\mathrm{H}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta\mathrm{H}(\overline{w}_1, \overline{w}_2)\,.\end{aligned}$$

Упр. 15.5. Первое очевидно, второе вытекает из симметричности g и кососимметричности ω, третье — из положительности формы g.