§16. Линейные отображения эрмитовых пространств

16.1. Эрмитово сопряжение линейных отображений. Напомню[1], что с каждым линейным отображением $f : U \to W$ канонически связано *двойственное отображение*

$$f^* : W^* \to U^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f, \tag{16-1}$$

которое однозначно описывается тем, что $\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f^*\varphi \rangle$ для всех $u \in U$ и $\varphi \in W^*$, где

$$\langle *, * \rangle : V \times V^* \to \mathbb{C}$$

обозначает свёртку векторов с ковекторами. Сопрягая f^* эрмитовыми корреляциями

$$h_U : U \to U^*, \quad u \mapsto (*, u), \quad \text{и} \quad h_W : W \to W^*, \quad w \mapsto (*, w),$$

из форм. (15-16) на стр. 256, получаем линейное отображение

$$f^\times \overset{\text{def}}{=} h_U^{-1} f^* h_W : W \to U, \tag{16-2}$$

которое называется *эрмитово сопряжённым* к f и однозначно описывается тем, что

$$(fu, w) = (u, f^\times w) \tag{16-3}$$

для всех $u \in U$ и $w \in W$. Если зафиксировать в U и W базисы $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$, то равенство (16-3) станет эквивалентно mn соотношениям $(fu_i, w_j) = (u_i, f^\times w_j)$ на скалярные произведения базисных векторов, которые собираются в матричное равенство

$$f(\boldsymbol{u})^t\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^t\, f^\times(\boldsymbol{w}).$$

Подставляя в него $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$ и $f^\times(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\, F^\times_{\boldsymbol{uw}}$, получаем соотношение $F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{F}^\times_{\boldsymbol{uw}}$, связывающее матрицы Грама $G_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}$ и $G_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^t \boldsymbol{w}$ базисов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ с матрицами $F_{\boldsymbol{wu}}$ и $F^\times_{\boldsymbol{uw}}$ операторов f и $f^\times$ в этих базисах. Из него вытекает, что $F^\times_{\boldsymbol{uw}} = \overline{G_{\boldsymbol{u}}^{-1} F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}}}$.

Если базисы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ ортонормальны, последнее равенство упрощается до $F^\times_{\boldsymbol{uw}} = \overline{F}^t$. Таким образом, матрицы эрмитово сопряжённых операторов в ортонормальных базисах эрмитово симметричны друг другу.

Предложение 16.1

Эрмитово сопряжение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U)$, $f \mapsto f^\times$, является инволютивным полулинейным изоморфизмом комплексных векторных пространств. При этом для любого линейного отображения $f : U \to W$ выполняются равенства

$$f^{\times\times} = f, \quad \ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp, \quad \operatorname{im} f^\times = (\ker f)^\perp,$$

а для любой пары линейных отображений $f : U \to V$, $g : V \to W$ — равенство $(gf)^\times = f^\times g^\times$.

[1] См. раздел 7.3 на стр. 88 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_07.pdf.

Доказательство. Инволютивность и полулинейность вытекают из (16-3) и, соответственно, эрмитовой симметричности и полуторалинейности скалярного произведения: из равенств

$$(f^\times w, u) = \overline{(u, f^\times w)} = \overline{(fu, w)} = (w, fu)$$

мы заключаем, что $f^{\times\times} = f$, а из равенств $(zfu, w) = z(fu, w) = z(u, f^\times w) = (u, \overline{z} f^\times w)$ — что $(zf)^\times = \overline{z}\, f^\times$. Вектор $w \in \ker f^\times$ если и только если $(u, f^\times w) = 0$ для всех $u \in U$. В силу (16-3) последнее равносильно равенству $(fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, т. е. ортогональности подпространства $\operatorname{im} f$ вектору w. Поэтому $\ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp$. Написав это для оператора $f^\times$ в роли f и взяв ортогонал к обеим частям, получаем $(\ker f)^\perp = \operatorname{im} f^\times$. Последнее утверждение вытекает из равенств $(gfu, w) = (fu, g^\times w) = (u, f^\times g^\times w)$. □

16.1.1. Отступление: вещественные структуры на комплексном пространстве. Рассмотрим произвольное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$. *Вещественной структурой* или *оператором комплексного сопряжения* на пространстве W называется любая $\mathbb{R}$-линейная $\mathbb{C}$-полулинейная[1] инволюция[2]

$$\sigma : W_\mathbb{R} \to W_\mathbb{R} \,. \tag{16-4}$$

Например, если пространство $W = V_\mathbb{C}$ является комплексификацией вещественного векторного пространства V, то комплексное сопряжение $\sigma : W_\mathbb{R} \to W_\mathbb{R}$, $w = u + iv \mapsto \overline{w} = u - iv$, является вещественной структурой на W.

Если на комплексном векторном пространстве W задана вещественная структура (16-4), то, как мы видели в прим. 9.6 на стр. 159, вещественное векторное пространство $W_\mathbb{R} = V_+ \oplus V_-$ распадается в прямую сумму собственных подпространств оператора σ

$$V_+ = \{w \in W_\mathbb{R} \mid \sigma w = w\} \quad \text{и} \quad V_- = \{w \in W_\mathbb{R} \mid \sigma w = -w\}$$

с собственными числами $+1$ и -1. Из $\mathbb{C}$-полулинейности оператора σ вытекает, что равенство $\sigma(u) = u$ влечёт равенство $\sigma(iu) = -i\sigma(u) = -iu$, а равенство $\sigma(v) = -v$ влечёт равенство $\sigma(-iv) = i\sigma(v) = -iv$, т. е. $\mathbb{R}$-линейные операторы умножения на i и на $-i$ задают взаимно обратные изоморфизмы между вещественными векторными пространствами V_+ и V_-:

$$i : V_+ \to V_- \,, \; u \mapsto iu \,, \qquad -i : V_+ \to V_- \,, \; v \mapsto -iv \,.$$

Таким образом, $W_\mathbb{R} = V \oplus iV$, где $V = V_+$, $iV = V_-$, а умножение вектора $w = u + iv \in W$ на комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ происходит по той же формуле

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \,,$$

что в комплексификации $V_\mathbb{C}$ вещественного векторного пространства $V = V_+$. Мы заключаем, что задание на комплексном векторном пространстве W вещественной структуры σ равносильно отождествлению этого пространства с комплексификацией $W = \mathbb{C} \otimes V_+$ вещественного векторного пространства $V_+ = \{u \in W \mid \sigma(w) = w\}$ неподвижных векторов оператора σ. По этой причине собственные подпространства V_+ и V_- вещественной структуры σ называются пространствами *вещественных* и *чисто мнимых* векторов этой структуры.

Подчеркнём, что на абстрактном векторном пространстве W над полем $\mathbb{C}$ имеется много разных вещественных структур, и никакого естественного предпочтения между ними *a priori*

[1] Т. е. обладающая для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w \in W$ свойством $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$.

[2] Т. е. обратное самому себе отображение.

не существует. Иными словами, у абстрактного комплексного вектора нет канонически определённых «вещественной» и «мнимой» частей, и чтобы они появились, на пространстве W должна быть зафиксирована какая-нибудь (одна из многих) вещественная структура.

16.1.2. Эрмитово сопряжение эндоморфизмов $f : W \to W$ эрмитова пространства W задаёт на комплексном векторном пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ вещественную структуру

$$\times : \mathrm{End}(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(W), \quad f \longmapsto f^{\times}.$$

Вещественное подпространство этой структуры обозначается

$$\mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) = \{f \mid f^{\times} = f\} \tag{16-5}$$

и называется пространством *самосопряжённых* или *эрмитовых* операторов, а чисто мнимое подпространство обозначается

$$\mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W) = \{f \mid f^{\times} = -f\} \tag{16-6}$$

и называется пространством *антисамосопряжённых* или *косоэрмитовых* операторов. Это вещественные (не комплексные!) векторные пространства и умножения операторов на i и на $-i$ задают взаимно обратные $\mathbb{R}$-линейные изоморфизмы между этими пространствами. Овеществление пространства $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ распадается в прямую сумму

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)_{\mathbb{R}} = \mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) \oplus \mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W).$$

Компоненты разложения $f = f_{+} + f_{-}$ произвольного $\mathbb{C}$-линейного оператора $f : W \to W$ в сумму эрмитова и косоэрмитова операторов задаются стандартными формулами

$$f_{+} = \frac{f + f^{\times}}{2} \in \mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) \quad \text{и} \quad f_{-} = \frac{f - f^{\times}}{2} \in \mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W).$$

Пример 16.1 (эрмитово сопряжение матриц)
Запись $\mathbb{C}$-линейных операторов $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ матрицами в стандартном ортонормальном базисе эрмитова пространства $\mathbb{C}^n$ отождествляет $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^n$ с пространством комплексных матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Эрмитово сопряжение эндоморфизмов задаёт на пространстве комплексных матриц вещественную структуру

$$\times : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad M \mapsto M^{\times} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M}^t,$$

которая сопоставляет матрице $M = (m_{ij})$ комплексно сопряжённую к транспонированной матрице M^t матрицу $M^{\times} = (m^{\times}_{ij})$ с элементами $m^{\times}_{ij} = \overline{m}_{ji}$. Вещественное подпространство V_{+} этой структуры обозначается

$$\mathrm{Mat}^{+}_n(\mathbb{C}) = \{M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid m_{ij} = \overline{m}_{ji}\}$$

и называется пространством *эрмитовых матриц*, а мнимое подпространство V_{-} обозначается

$$\mathrm{Mat}^{-}_n(\mathbb{C}) = \{M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid m_{ij} = -\overline{m}_{ji}\}$$

и называется пространством *анти-* или *косоэрмитовых матриц*. Это *вещественные* (не комплексные!) векторные подпространства в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ вещественной размерности n^2, и как вещественное векторное пространство $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} = \mathrm{Mat}^{+}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}^{-}_n(\mathbb{C})$, причём матрица H эрмитова если и только если матрица iH косоэрмитова и наоборот. Например, при $n = 2$ базис вещественного пространства $\mathrm{Mat}_2^+(\mathbb{C})$ эрмитовых матриц составляют матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая эти матрицы на i, получаем базис в пространстве $\mathrm{Mat}_2^-(\mathbb{C})$ антиэрмитовых матриц:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 16.2 (унитарные операторы)
Поскольку каждый унитарный[1] оператор $f : W \to W$ биективен, всякий вектор $w \in W$ можно записать в виде $w = f^{-1}v$ для некоторого $v \in W$. Поэтому выполнение для любых векторов u, w равенства $(fu, fw) = (u, w)$ равносильно выполнению для любых векторов u и $v = fw$ равенства $(fu, v) = (u, f^{-1}v)$. Мы заключаем, что оператор унитарен если и только если он эрмитово сопряжён своему обратному. На языке матриц это означает, что в унитарном базисе матрица унитарного оператора эрмитово сопряжена к своей обратной, т. е. $\overline{F}^t = F^{-1}$, что согласуется с форм. (15-15) на стр. 256.

16.2. Нормальные операторы. Оператор f на эрмитовом пространстве W называется *нормальным*, если он перестановочен со своим эрмитово сопряжённым, т. е. $f^\times \circ f = f \circ f^\times$. Например, нормальными являются все (анти) самосопряжённые и унитарные операторы, так как для них $f^\times$ равен $\pm f$ и f^{-1} соответственно.

Теорема 16.1
Действующий в эрмитовом пространстве оператор f нормален если и только если он диагонализуем в ортонормальном базисе. При этом диагональная матрица для f с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора ортонормального базиса, в котором f диагонален.

Доказательство. Если оператор $f : W \to W$ имеет в ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$ диагональную матрицу $F_{\boldsymbol{e}}$, то сопряжённый к нему оператор имеет в этом базисе диагональную матрицу $\overline{F}_{\boldsymbol{e}}$, которая коммутирует с $F_{\boldsymbol{e}}$. Поэтому f нормален. Обратная импликация доказывается индукцией по $\dim W$. Если оператор f скалярен (что так при $\dim W = 1$), то доказывать нечего. Если f не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство $U \subsetneq W$ и $W = U \oplus U^\perp$. Согласно n° 9.4 на стр. 165 перестановочный f оператор $f^\times$ переводит U в себя. Поэтому для всех $u \in U$ и любого $w \in U^\perp$ выполняется равенство $(fw, u) = (w, f^\times u) = 0$, т. е. $fw \in U^\perp$. Таким образом, оператор f переводит $U^\perp$ в себя. По индукции, $f|_{U^\perp}$ диагонализуем в некотором ортонормальном базисе пространства $U^\perp$. Добавляя к этому базису любой ортонормальный базис собственного подпространства U, получаем базис пространства W, в котором матрица f диагональна. Последнее утверждение теоремы имеет место для любого диагонализуемого оператора, что было установлено нами в n° 9.2.6 на стр. 158. □

Следствие 16.1
У нормального оператора собственные подпространства с разными собственными числами эрмитово ортогональны друг другу. □

[1] См. n° 15.3.4 на стр. 255.

Следствие 16.2
Самосопряжённые операторы — это в точности диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с вещественными собственными значениями. □

Следствие 16.3
Антисамосопряжённые операторы — это в точности диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с чисто мнимыми собственными значениями. □

Следствие 16.4
Унитарные операторы — это в точности диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с собственными значениями, по модулю равными единице. □

Упражнение 16.1. Покажите, что унитарная группа U_n является компактным линейно связным подмножеством в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

16.2.1. Нормальные операторы в евклидовом пространстве. В курсе геометрии изучается[1] евклидово сопряжение $\mathbb{R}$-линейных операторов $f : V \to V$, действующих на евклидовом пространстве V над полем $\mathbb{R}$. Если комплексифицировать пространство V и продолжить[2] евклидову структуру $(* , *)$ на V до эрмитовой структуры $(* , *)_{\mathrm{H}}$ на $V_{\mathbb{C}}$, то евклидова сопряжённость $\mathbb{R}$-линейных операторов $f, f^{\times} : V \to V$ будет равносильна эрмитовой сопряжённости их комплексификаций $f_{\mathbb{C}}, f_{\mathbb{C}}^{\times} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, поскольку сопряжение перестановочно с комплексификацией: $(f_{\mathbb{C}})^{\times} = (f^{\times})_{\mathbb{C}}$. В самом деле, в евклидово ортонормальном базисе пространства V над $\mathbb{R}$, который одновременно является эрмитово ортонормальным базисом $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$, и евклидово, и эрмитово сопряжение означают транспонирование вещественной матрицы, которая является матрицей обоих операторов f и $f_{\mathbb{C}}$ в этом базисе.

Мы заключаем, что комплексификация нормального[3] $\mathbb{R}$-линейного оператора $f : V \to V$ является нормальным оператором на пространстве $V_{\mathbb{C}}$, и в $V_{\mathbb{C}}$ существует такой эрмитово ортонормальный базис, в котором матрица комплексифицированного оператора $f_{\mathbb{C}}$ диагональна. При этом комплексификация евклидово (анти)самосопряжённого или ортогонального оператора на V является соответственно (анти)эрмитовым или унитарным оператором на $V_{\mathbb{C}}$.

Согласно сл. 15.2 на стр. 250, каждое комплексное собственное подпространство $V_{\lambda} \subset V_{\mathbb{C}}$ комплексифицированного оператора $f_{\mathbb{C}}$ с вещественным собственным числом λ является комплексификацией вещественного собственного подпространства $V_{\lambda} \subset V$ оператора f, а собственные подпространства оператора $f_{\mathbb{C}}$ с невещественными собственными числами разбиваются по сл. 15.3 на стр. 250 на пары комплексно сопряжённых друг другу подпространств V_{λ} и $V_{\overline{\lambda}} = \overline{V}_{\lambda}$ с комплексно сопряжёнными значениями $\lambda \neq \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$. При этом каждому эрмитово ортонормальному базису $w_1, \dots , w_m$ пространства V_{λ} отвечает комплексно сопряжённый базис $\overline{w}_1, \dots , \overline{w}_m$ пространства $V_{\overline{\lambda}}$, тоже ортонормальный по упр. 15.3 на стр. 251. Согласно предл. 15.2 на стр. 248 $\mathbb{C}$-линейная оболочка каждой пары сопряжённых базисных векторов $w_{\nu} = u_{\nu} + i v_{\nu}, \overline{w}_{\nu} = u_{\nu} - i v_{\nu}$ является комплексификацией двумерного вещественного f-инвариантного подпространства U_{ν} с базисом u_{ν}, v_{ν}, в котором оператор f имеет матрицу[4]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a = \operatorname{Re}\lambda\,,\ b = \operatorname{Im}\lambda\,. \tag{16-7}$$

[1] См. раздел 11.2 на стр. 145 лекции http://82.204.189.191/ps/stud/geom_ru/2122/lec_11.pdf.
[2] См. прим. 15.2 на стр. 251.
[3] Т. е. перестановочного со своим евклидово сопряжённым оператором.
[4] См. формулу (15-3) на стр. 249.

Так как собственные векторы w_ν и $\overline{w}_\nu$ имеют разные собственные числа $\lambda \neq \overline{\lambda}$, они эрмитово ортогональны друг другу. Из равенств

$$1 = (u_\nu + iv_\nu, u_\nu + iv_\nu)_{\mathrm{H}} = (u_\nu, u_\nu) + (v_\nu, v_\nu) + i\big((v_\nu, u_\nu) - (u_\nu, v_\nu)\big) \tag{16-8}$$

$$0 = (u_\nu + iv_\nu, u_\nu - iv_\nu)_{\mathrm{H}} = (u_\nu, u_\nu) - (v_\nu, v_\nu) + i\big((v_\nu, u_\nu) + (u_\nu, v_\nu)\big) \tag{16-9}$$

вытекает, что $(u_\nu, v_\nu) = 0$, а $(u_\nu, u_\nu) = (v_\nu, v_\nu) = 1/2$ в вещественном евклидовом пространстве V. Тем самым, векторы $\sqrt{2}u_\nu$ и $\sqrt{2}v_\nu$ образуют ортонормальный базис пространства U_ν. По той же причине подпространства U_α и U_β евклидово ортогональны друг другу при $\alpha \neq \beta$.

Упражнение 16.2. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что для каждого нормального оператора f на вещественном евклидовом пространстве V можно указать такой евклидово ортонормальный базис пространства V, в котором матрица оператора f будет блочно диагональной из 1×1 блоков, в которых стоят вещественные собственные числа оператора f, и 2×2 блоков вида (16-7) с $b > 0$, которые отвечают невещественным собственным числам $a + ib$ оператора f, и эта матрица с точностью до перестановки блоков не зависит от выбора ортонормального базиса с таким свойством. Она называется *канонической* или *нормальной* формой нормального оператора f в евклидовом пространстве.

Если оператор f самомопряжён, то все его собственные числа вещественны, и блоков размера 2×2 в предыдущем представлении не будет. Мы заключаем, что самомопряжённые операторы на евклидовом пространстве — это в точности операторы, диагонализуемые в некотором ортонормальном базисе. Векторы такого базиса называются *нормальными осями* самомопряжённого оператора. Если все собственные числа оператора попарно различны, нормальные оси определены однозначно с точностью до знака. В общем случае произвол в выборе нормальных осей — это в точности произвол в выборе евклидово ортонормального базиса в каждом собственном подпространстве оператора.

Если оператор f антисамосопяржён, то все его собственные числа чисто мнимы, и его нормальная форма состоит из 2×2 блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a > 0\,. \tag{16-10}$$

Собственные числа ортогонального оператора f исчерпываются ±1 и парами лежащих на единичной окружности комплексно сопряжённых чисел $\cos\varphi \pm i\sin\varphi$, где $0 < \varphi < \pi$. Мы заключаем, что нормальная форма ортогонального оператора состоит из 1×1 блоков ±1 и 2×2 блоков вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{16-11}$$

16.3. Сингулярные числа и сингулярные направления. С каждым $\mathbb{C}$-линейным отображением $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U, W связаны самосопряжённые операторы

$$f^\times f : U \to U \quad \text{и} \quad ff^\times : W \to W\,.$$

По сл. 16.2 на стр. 263 оба они имеют вещественный спектр.

Лемма 16.1
Оба спектра неотрицательны, и $\ker f^\times f = \ker f$, а $\ker ff^\times = (\operatorname{im} f)^\perp$.

Доказательство. Если $f^\times f v = \lambda v$ для ненулевого v, то

$$(fv, fv) = (f^\times f v, v) = (\lambda v, v) = \lambda\,(v, v)\,,$$

откуда либо $fv \neq 0$ и $\lambda = (fv, fv)/(v, v) > 0$, либо $\lambda = 0$ и $v \in \ker f$. Последнее означает, что $\ker f^\times f = \ker f$. Аналогично, если $ff^\times v = \lambda v$ для ненулевого v, то

$$(f^\times v, f^\times v) = (ff^\times v, v) = (\lambda v, v) = \lambda\,(v, v)\,.$$

Поэтому либо $f^\times v \neq 0$ и в этом случае $\lambda = (f^\times v, f^\times v)/(v, v) > 0$, либо $f^\times v = 0$ и $\lambda = 0$, откуда $\ker ff^\times = \ker f^\times$, а $\ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp$ по предл. 16.1 на стр. 259. □

Теорема 16.2
Каждое $\mathbb{C}$-линейное отображение $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U, W раскладывается в композицию $f = ghp$ ортогональной проекции $p : U \twoheadrightarrow V$ на подпространство $V = (\ker f)^\perp \subset U$, самосопряжённого оператора $h : V \xrightarrow{\sim} V$ с положительными собственными числами $\alpha_1, \dots \alpha_r$, где $r = \operatorname{rk} f = \dim V$, и унитарного вложения $g : V \hookrightarrow W$, изометрически отображающего V на $\operatorname{im} f \subset W$. Операторы g и h однозначно определяются этими свойствами по оператору f, а квадраты $\alpha_1^2, \dots \alpha_r^2$ собственных чисел оператора h — это в точности все (с учётом кратностей) ненулевые собственные числа оператора $f^\times f : U \to U$.

Доказательство. Зафиксируем в U ортонормальный базис $u_1, \dots, u_n$ из собственных векторов самосопряжённого оператора $f^\times f : U \to U$. Пусть собственное значение $f^\times f$ на векторе u_i равно α_i^2, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ неотрицательно. Упорядочим векторы u_i так, чтобы первые r чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ были положительны, а остальные α_j с $j > r$ — нулевыми. Таким образом, $u_j \in \ker f^\times f = \ker f$ при $j > r$. При $1 \leqslant k, \ell \leqslant r$ выполняются равенства

$$(fu_k, fu_\ell) = (f^\times f u_k, u_\ell) = \alpha_k^2\,(u_k, u_\ell) = \begin{cases} \alpha_k^2 > 0 & \text{при } k = \ell \\ 0 & \text{при } k \neq \ell\,. \end{cases}$$

Поэтому векторы $w_i = fu_i\,/\,\alpha_i$ с $i \leqslant r$ образуют ортонормальный набор в пространстве W. В частности, они линейно независимы. Поскольку $f(u_j) = 0$ при $j > r$, для каждого вектора $u = \sum x_i u_i \in U$ выполняется равенство $fu = \alpha_1 x_1 w_1 + \ldots + \alpha_r x_r w_r$. Мы заключаем, что векторы w_i с $i \leqslant r$ составляют ортонормальный базис в $\operatorname{im} f$, векторы u_i с $i \leqslant r$ — ортонормальный базис в $(\ker f)^\perp = V$, а оператор f является композицией ортогональной проекции $p : U \twoheadrightarrow V$ вдоль $\ker f$, диагонального оператора $h : V \to V$, $u_i \mapsto \alpha_i u_i$, и изометрического изоморфизма $g : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$, $u_i \mapsto w_i$, как и утверждалось.

Упражнение 16.3. Убедитесь, что всякий ортогональный проектор p самосопряжён.

Пусть самосопряжённый оператор $h_1 : V \to V$ с положительным спектром и изометрический изоморфизм $g_1 : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ таковы, что $f = g_1 h_1 p$. Так как $g_1^\times = g_1^{-1}$ как операторы $\operatorname{im} f \to V$, а $h^\times = h$, выполняется равенство $f^\times f = p^\times h_1^\times g_1^\times g_1 h_1 p = p h_1^2 p = h_1^2 p$, откуда $h_1^2 = f^\times f|_V$. Так как h_1 перестановочен с $h_1^2 = f^\times f|_V$, операторы h_1 и $f^\times f|_V$ диагонализуемы в одном базисе. Следовательно, h_1 действует на каждом собственном подпространстве $V_{\alpha_i^2}$ оператора $f^\times f|_V$ умножением на α_i и тем самым совпадает с h. Так как

$$g_1^{-1} f|_V = h = g^{-1} f|_V$$

и оператор $f|_V : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ биективен, мы заключаем, что $g_1^{-1} = g^{-1}$, а значит, $g_1 = g$. □

Упражнение 16.4. Убедитесь, что оператор $f^\times : W \to V$ действует на построенные в доказательстве теор. 16.2 векторы $w_1, \dots, w_r \in W$ по правилу $w_i \mapsto \alpha_i u_i$ и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов $f^\times f$ и $ff^\times$ одинаковы.

Замечание 16.1. (сингулярные числа и сингулярные направления) Говоря неформально, предыдущая теорема утверждает, что каждое линейное отображение $f : U \to W$ сначала проектирует U вдоль своего ядра на ортогональное дополнение $V \subset U$ к этому ядру, потом растягивает пространство V в попарно перпендикулярных направлениях с положительными коэффициентами, а потом изометрически вкладывает результат в W. Направления, в которых происходит растяжение, т. е. одномерные подпространства, порождённые базисными векторами u_i из доказательства теор. 16.2, называют *сингулярными направлениями* отображения f. Обратите внимание, что они определены однозначно, только если все собственные подпространства оператора $f^\times f$ одномерны, а в общем случае их выбор означает выбор ортогонального базиса в каждом собственном подпространстве. Набор из $\dim U$ неотрицательных вещественных чисел α_i, равных квадратным корням из всех (включая нулевые) собственных чисел самосопряжённого оператора

$$f^\times f : U \to U\,,$$

или — что то же самое по упр. 16.4 — корням из собственных чисел оператора

$$ff^\times : W \to W\,,$$

называется *набором сингулярных чисел* отображения $f : U \to W$. Ровно $\operatorname{rk} f$ из них положительны. Эпитеты «сингулярные» в этих названиях перекочевали из анализа, где в целом ряде задач возникают функции типа «коэффициента удлинения», имеющие вид

$$\varphi : U \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}\,, \quad u \mapsto (fu, fu)/(u,u)\,,$$

где U — эрмитово (или евклидово) пространство, а $f : U \to W$ — линейное отображение в эрмитово (или евклидово) пространство.

Упражнение 16.5. Покажите, что производная функции φ зануляется в точности на собственных подпространствах оператора $f^\times f$.

16.4. Полярное разложение. Для обратимого линейного эндоморфизма $f \in \mathrm{GL}(W)$ эрмитова пространства W теор. 16.2 утверждает существование и единственность разложения $f = g_1 h_1$, в котором $g_1 \in \mathrm{U}(W)$, а $h_1 \in \mathrm{GL}(W)$ самосопряжён и имеет положительный спектр. Переходя в обеих частях равенства к обратным операторам, заключаем что каждый оператор $f \in \mathrm{GL}(W)$ также имеет единственное разложение $f = h_2 g_2$, в котором $g_2 \in \mathrm{U}(W)$, а $h_2 \in \mathrm{GL}(W)$ самосопряжён и имеет положительный спектр. Разложения $f = g_1 h_1 = h_2 g_2$ называются *полярными разложениями*, поскольку для $W = \mathbb{C}$ они представляют ненулевое комплексное число $z \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ в виде $z = \varrho e^{i\vartheta}$, где число $\varrho = |z|$ вещественно и положительно, а число $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ лежит на единичной окружности $\mathrm{U}_1 \subset \mathbb{C}^\times$. Компоненты двух полярных разложений находятся из равенств

$$\begin{aligned} f^\times f &= (g_1 h_1)^\times (g_1 h_1) = h_1 g_1^{-1} g_1 h_1 = h_1^2 \\ ff^\times &= (h_2 g_2)(h_2 g_2)^\times = h_2 g_2 g_2^{-1} h_2 = h_2^2\,. \end{aligned}$$

Таким образом, $h_1 = \sqrt{f^\times f}$, $h_2 = \sqrt{ff^\times}$ являются многочленами от $f^\times f$ и $ff^\times$ и вычисляются как объяснялось в прим. 9.9 на стр. 164, а $g_1 = fh_1^{-1}$, $g_2 = h_2^{-1}f$.

Пример 16.3

Найдём полярное разложение $f = gh$ оператора $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу оператора $f^\times f$:

$$\begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2(1-i) & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{9} & -\frac{16}{9}(1-i) \\ -\frac{16}{9}(1+i) & \frac{17}{9} \end{pmatrix}$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F^\times F) = t^2 - 10t + 9 = (t-1)(t-9)$. Согласно n° 9.3.2 на стр. 163, $\sqrt{f^\times f} = af^\times f + bE$, где линейный двучлен $p(t) = at + b$ имеет $p(1) = 1$ и $p(9) = 3$, откуда $a = 1/4$, $b = 3/4$. Таким образом, операторы h и g имеют матрицы

$$H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{73}{9} & -\frac{16}{9}(1-i) \\ -\frac{16}{9}(1+i) & \frac{17}{9} \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} & -\frac{4}{9}(1-i) \\ -\frac{4}{9}(1+i) & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

$$G = FH^{-1} = \begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{27} & \frac{4}{27}(1-i) \\ \frac{4}{27}(1+i) & \frac{25}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1+i) & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix}.$$

16.5. Экспоненциальное отображение. Алгебра аналитических функций[1] $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ алгебраически вычислима[2] на любом $\mathbb{C}$-линейном операторе $f : W \to W$ на комплексном векторном пространстве W. В частности, для любого оператора f определена экспонента $e^f : W \to W$. Если пространство W эрмитово, а оператор f антиэрмитов, то он диагонализуем в некотором ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W и имеет чисто мнимые собственные числа $i\varphi_1, \dots, i\varphi_n$. Как мы видели в доказательстве теор. 9.4 на стр. 161, в этом случае оператор e^f переводит каждое собственное подпространство $W_{i\varphi} = K_{i\varphi}$ оператора f в себя и действует на нём умножением на $e^{i\varphi}$. Мы заключаем, что оператор e^f диагонализуем в том же ортонормальном базисе, что и f, и все его собственные числа $e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}$ лежат на единичной окружности. Тем самым, оператор e^f унитарен. Так как каждый унитарный оператор имеет указанный вид в подходящем ортонормальном базисе, мы заключаем, что экспоненциальное отображение

$$\exp : \operatorname{End}^-(W) \twoheadrightarrow U(W), \quad f \mapsto e^f, \tag{16-12}$$

сюрьективно отображает вещественное векторное пространство антиэрмитовых матриц на унитарную группу. В частности, полярное разложение $f = hg$ оператора $f \in \mathrm{GL}(W)$ можно записать в виде $f = he^{it}$, где h, t самосопряжены и h положителен, однако в отличие от унитарного оператора $g = e^{it}$, самосопряжённый оператор t со свойством $e^{it} = g$ определяется унитарным оператором g не однозначно, поскольку экспоненциальное отображение не инъективно: например, $e^{2\pi i \mathrm{Id}} = \mathrm{Id} = e^0$.

[1] Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *аналитической*, если она является сумой абсолютно сходящегося всюду в $\mathbb{C}$ степенного ряда.

[2] См. n° 9.3.1 на стр. 160.

Упражнение 16.6 (по анализу). Убедитесь, что отображение (16-12) непрерывно и дифференцируемо в каждой точке, и вычислите его производную.

Из этого упражнения среди прочего вытекает, что унитарная группа линейно связна[1].

[1] См. упр. 16.1 на стр. 263.

Упр. 16.1. Стандартная эрмитова структура[1] на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, рассматриваемом как n^2-мерное комплексное координатное пространство, сопоставляет паре матриц $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ число $(A, B) \overset{\text{def}}{=} \sum_{ij} a_{ij}\overline{b}_{ij} = \mathrm{tr}\, AB^{\times}$, где $B^{\times} = (b^{\times}_{ij}) = \overline{B}^t$ имеет $b^{\times}_{ij} = \overline{b}_{ji}$. Так как унитарная матрица U имеет $U^{\times} = U^{-1}$, её эрмитова длина $\sqrt{(U, U)} = \sqrt{n}$. Тем самым, группа U_n ограничена. Она замкнута в силу того, что задаётся системой квадратных уравнений на матричные элементы, возникающей из матричного равенства $U^t\overline{U} = E$. Диагональная матрица D с диагональными элементами вида $e^{i\vartheta}$ соединяется с единичной матрицей E гладким путём $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{U}_n$, образ которого состоит из диагональных матриц того же вида с $\vartheta \to 0$. Поскольку произвольная унитарная матрица F записывается как $F = CDC^{-1}$ для некоторого $C \in \mathrm{U}_n$, путь $t \mapsto C \cdot \gamma(t) \cdot C^{-1}$ целиком лежит в U_n и соединяет F с E.

Упр. 16.3. Пусть $p : W \to W$ проектирует пространство W на подпространство $U \subset W$ вдоль его ортогонального дополнения $U^{\perp}$. Поскольку $p^{\times}p^{\times} = (pp)^{\times} = \mathrm{Id}^{\times} = \mathrm{Id}$, оператор $p^{\times}$ тоже является проектором. Так как $\ker p^{\times} = (\mathrm{im}\, p)^{\perp} = U^{\perp}$, а $\mathrm{im}\, p^{\times} = (\ker p)^{\perp} = U$, оператор $p^{\times}$ тоже проектирует W на U вдоль $U^{\perp}$. Второе объяснение: в ортонормальном базисе, согласованном с разложением $W = U \oplus U^{\perp}$, проектор p имеет диагональную матрицу из нулей и единиц, а значит, самосопряжён по сл. 16.2 на стр. 263.

Упр. 16.5. Из равенств $(u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + o(|u|)$ и $(f(u + v), f(u + v)) = (fu, fu) + 2(fu, fv) + o(|u|)$ вытекает, что $(u, u)'v = 2(u, v)$ и $(fu, fu)'v = 2(fu, fv) = 2(f^{\times}fu, v)$. Согласно правилу дифференцирования дробей, условие $\varphi'(u) = 0$ означает тогда, что для любого $v \in V$ выполняется равенство $2(f^{\times}fu, v)(u, u) - 2(fu, fu)(u, v) = 0$. Поэтому

$$f^{\times}fu = u \cdot (fu, fu)/(u, u)\,,$$

т. е. вектор u является собственным для оператора $f^{\times}f$ с собственным числом

$$(fu, fu)/(u, u) = (f^{\times}fu, u)/(u, u)\,.$$

Упр. 16.6. Покажите, что правило $\|f\| = \max_{\|w\|=1} \|fw\| = \max_{w\neq 0} \|fw\| \,/\, \|w\|$ задаёт на овеществлении пространства $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ норму[2]: положительность и однородность очевидны, неравенство треугольника вытекает из неравенства треугольника для эрмитовой нормы: $\|f + g\| = \max_{\|w\|=1} \|fw + gw\| \leqslant \max_{\|w\|=1} \big(\|fw\| + \|gw\|\big) \leqslant \max_{\|w\|=1} \|fw\| + \max_{\|w\|=1} \|gw\| = \|f\| + \|g\|$. Эта норма удовлетворяет неравенству

$$\|fg\| = \max_{w\neq 0} \frac{\|fgw\|}{\|w\|} = \max_{gw\neq 0} \left(\frac{\|fgw\|}{\|gw\|} \cdot \frac{\|gw\|}{\|w\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{gw\neq 0} \frac{\|fgw\|}{\|gw\|} \cdot \max_{w\neq 0} \frac{\|gw\|}{\|w\|} \leqslant \max_{v\neq 0} \frac{\|fv\|}{\|v\|} \cdot \|g\| = \|f\| \cdot \|g\|\,,$$

[1] См. прим. 15.2 на стр. 251.

[2] Нормой на вещественном векторном пространстве V называется такая функция $V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $v \mapsto \|v\|$, что $\|v\| > 0$ для $v \neq 0$, выполняется неравенство треугольника: $\|u + w\| \leqslant \|u\| + \|w\|$ для всех $u, w \in V$, и $\|xv\| = |x| \cdot \|v\|$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Каждая норма определяет на V метрику, и метрическая топология, задаваемая такой метрикой на конечномерном векторном пространстве V не зависит от выбора нормы. Подробности см. в лекции http://82.204.189.191/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf.

которое вместе с неравенством треугольника позволяет мажорировать норму остатка экспоненциального ряда $e^f = \sum_{m\geqslant 0} f^m / m!$ сходящейся геометрической прогрессией также, как это делается в начальном курсе анализа для экспонент действительных чисел, и дословно те же рассуждения с заменой модуля действительного числа на норму оператора показывают, что экспоненциальный ряд абсолютно сходится всюду на пространстве линейных операторов и задаёт дифференцируемую функцию $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \to \mathrm{GL}(W)$, $X \mapsto e^X$, производная которой в точке $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ — это линейный оператор e^f.