

Модули, алгебры, матрицы

АЛ5♦1 (нётеровы модули). Докажите, что следующие свойства модуля M над произвольным коммутативным кольцом эквивалентны: **а)** любое множество векторов $X \subset M$ содержит конечное подмножество, линейная оболочка которого совпадает с линейной оболочкой всего X **б)** каждый подмодуль $N \subseteq M$ конечно порождён **в)** каждая возрастающая цепочка вложенных подмодулей $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots \subseteq M$ стабилизируется, т. е. существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $N_v = N_n$ при $v \geq n$.

АЛ5♦2. Покажите, что каждый конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом **а)** нётеров **б)** все его подмодули и фактор модули конечно порождены.

АЛ5♦3. Пусть фактор модуль $L = M/N$ свободен. Верно ли, что $M \simeq N \oplus L$?

АЛ5♦4. Сколько различных разложений в прямую сумму имеет \mathbb{Z} -модуль $\mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(5)$?

АЛ5♦5. Пусть порядки¹ конечных подгрупп A_1, \dots, A_n абелевой группы A попарно взаимно просты. Докажите, что их сумма в A является прямой.

АЛ5♦6. Верно ли, что порождённый вектором $w = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}^m$ подмодуль $\mathbb{Z}w \subset \mathbb{Z}^m$ отщепляется прямым слагаемым² если и только если $\text{НОД}(z_1, \dots, z_m) = 1$?

АЛ5♦7 (целозначные многочлены). Пусть $M_n = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f \leq n \text{ и } \forall z \in \mathbb{Z} f(z) \in \mathbb{Z}\}$ и $\gamma_k(x) = \binom{x+k}{k} = (x+1) \cdot \dots \cdot (x+k)/k!$, где $1 \leq k \leq n$, а $\gamma_0(x) = 1$. Покажите, что γ_k линейно независимы над \mathbb{Z} , выясните, как на них действует оператор $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$, и докажите, что любой многочлен $f \in M_n$ имеет вид $f = \sum_{k \geq 0} \nabla^k f(-1) \gamma_k$. Сколько элементов в фактор модуле $M_n / (M_n \cap \mathbb{Z}[x])$?

АЛ5♦8 (проекторы). Пусть K -линейный эндоморфизм $f : M \rightarrow M$ имеет $f^2 = f$. Покажите, что $M = \ker f \oplus \text{im } f$ и что f проектирует M на $\text{im } f$ вдоль $\ker f$. Что делает $1 - f$?

АЛ5♦9. Докажите, что каждая 2×2 матрица с элементами из произвольного коммутативного кольца с единицей удовлетворяет приведённому квадратному уравнению и решите в $\text{Mat}_2(\mathbb{Q})$ уравнения **а)** $X^2 = 0$ **б)** $X^3 = 0$ **в)** $X^2 = X$ **г)** $X^2 = E$ **д)** $X^2 = -E$.

АЛ5♦10* (обращение Мёбиуса в чуме). Пусть в чуме³ P с отношением $x \leq y$ существует такой $m \in P$, что $m \leq x$ для всех $x \in P$, и для всех $x < y$ множество $\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$ конечно. Обозначим через $A = A(P)$ множество всех таких функций $\varrho : P \times P \rightarrow \mathbb{C}$, что $\varrho(x, y) = 0$, если отношение $x \leq y$ не выполнено. Покажите, что **а)** сумма и произведение

$$\varrho_1 + \varrho_2 : (x, y) \mapsto \varrho_1(x, y) + \varrho_2(x, y) \quad \text{и}^4 \quad \varrho_1 \varrho_2 : (x, y) \mapsto \sum_{x \leq z \leq y} \varrho_1(x, z) \varrho_2(z, y)$$

задают на A структуру ассоциативной \mathbb{C} -алгебры с единицей **б)** функция $\varrho \in A$ обратима если и только если $\varrho(x, x) \neq 0$ для всех $x \in P$ **в)** существует функция⁵ $\mu \in A$, обратная к функции $\zeta \in A$, равной 1 для всех $x \leq y$, причём $\mu(x, x) = 1$ для всех $x \in P$ и $\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = -\sum_{x < z \leq y} \mu(z, y)$ для всех $x < y$ **г)** если для функции $g : P \rightarrow \mathbb{C}$ известны значения всех сумм $\sigma_g(x) = \sum_{y \leq x} g(y)$, то g однозначно восстанавливается из них по формуле обращения Мёбиуса: $g(x) = \sum_{y \leq x} \sigma_g(y) \mu(y, x)$.

АЛ5♦11*. Убедитесь, что условия зад. АЛ5♦10 выполнены для **а)** множества \mathbb{N} с отношением $n|m$ **б)** множества всех конечных подмножеств с отношением $N \subseteq M$ в любом множестве X и явно опишите для них функции Мёбиуса и формулы обращения⁶.

¹Порядком конечной группы называется количество элементов в ней.

²Т. е. существует такой \mathbb{Z} -подмодуль $N \subset \mathbb{Z}^m$, что $\mathbb{Z}^m = \mathbb{Z}w \oplus N$.

³Т. е. в частично упорядоченном множестве.

⁴Поучительно сравнить это умножение с умножением комплексных верхнетреугольных матриц.

⁵Она называется функцией Мёбиуса чума P .

⁶Ответы в (б) поучительно сравнить с комбинаторными формулами включения-исключения.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9а			
б			
в			
г			
д			
10а			
б			
в			
г			
11а			
б			