Диаграммный поиск

Терминология. Цепочка гомоморфизмов абелевых групп $\ldots \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} \ldots$ называется *точной* в C, если $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$. Фактор группа $\operatorname{coker}\alpha \overset{\text{def}}{=} C/\operatorname{im}\alpha$ называется *коядром* стрелки α. Точность диаграммы

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \to 0 \qquad (1)$$

означает, что $A = \ker\beta$ и $B = \operatorname{coker}\alpha$. Такие диаграммы называются *точными тройками*. Диаграмма гомоморфизмов абелевых групп называется *коммутативной*, если для любых групп A, B в ней композиция стрелок, ведущих из A в B, зависит только от A и B, но не от пути, вдоль которого вычисляется композиция.

А6½◇1. Для абелевой группы X и гомоморфизма абелевых групп $\varphi : A \to B$ положим

$$\varphi_* : \operatorname{Hom}(X,A) \to \operatorname{Hom}(X,B),\ \alpha \mapsto \varphi\alpha,$$
$$\varphi^* : \operatorname{Hom}(B,X) \to \operatorname{Hom}(A,X),\ \beta \mapsto \beta\varphi.$$

Убедитесь, что $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$, а $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$, и покажите, что если тройка (1) точна, то последовательности

$$0 \to \operatorname{Hom}(X,A) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}(X,C) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}(X,B) \qquad (2)$$
$$0 \to \operatorname{Hom}(B,X) \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Hom}(C,X) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}(A,X)$$

тоже точны, причём самые правые стрелки в них не обязательно сюрьективны.

А6½◇2. Покажите, что если для любой абелевой группы X последовательность (2) точна и правая стрелка в ней сюрьективна, то тройка (1), из которой она получается, тоже точна.

А6½◇3. Постройте для любой композиции гомоморфизмов $\beta\alpha$ точную последовательность

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta\alpha \to \ker\beta \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to 0.$$

А6½◇4 (лемма о змее). Покажите, что каждая из коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точными строками однозначно достраивается до коммутативной диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

постройте гомоморфизм $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$, включающийся в точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \xrightarrow{\varphi} \ker\beta \xrightarrow{\psi} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{[\varphi']} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{[\psi']} \operatorname{coker}\gamma \longrightarrow 0,$$

и выясните, влечёт ли обратимость стрелки β инъективность стрелки α и сюрьективность стрелки γ, а обратимость стрелок α и γ — обратимость стрелки β.

A6½◇5. Для коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D_1 \arrow[d, "\delta"] \\ A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & D_2 \end{tikzcd}$$

постройте точные в среднем члене последовательности:

а) $\ker\beta \to \ker\gamma \to \ker\delta$ в предположении, что $\operatorname{coker}\alpha = 0$

б) $\operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$ в предположении, что $\ker\delta = 0$.

A6½◇6 (лемма о пяти гомоморфизмах). Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & X_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

строки точны, φ_1 сюрьективен, φ_5 инъективен, а φ_2 и φ_4 обратимы. Покажите, что φ_3 тоже обратим.